



# Evaluation stochastique et simulation des réseaux radio

Guillaume Méheut, Stéphane Pérennes, Hervé Rivano

## ► To cite this version:

Guillaume Méheut, Stéphane Pérennes, Hervé Rivano. Evaluation stochastique et simulation des réseaux radio. [Rapport de recherche] RR-5989, INRIA. 2006, pp.32. inria-00102039v2

**HAL Id: inria-00102039**

**<https://hal.inria.fr/inria-00102039v2>**

Submitted on 29 Sep 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# *Évaluation stochastique et simulation des réseaux radio*

Guillaume Méheut, Stéphane Pérennes, Hervé Rivano

**N° 5989**

28 septembre 2006

\_\_\_\_\_ Thème COM \_\_\_\_\_



*rapport  
de recherche*





# Évaluation stochastique et simulation des réseaux radio

Guillaume Méheut, Stéphane Pérennes, Hervé Rivano

Thème COM — Systèmes communicants  
Projet MASCOTTE

Rapport de recherche n° 5989 — 28 septembre 2006 — 32 pages

**Résumé :** La capacité d'un réseau ad hoc sans fil passe mal à l'échelle lorsque le nombre  $N$  de noeuds du réseau augmente. Si chaque noeud choisit un interlocuteur parmi les autres noeuds, le débit avec lequel les noeuds peuvent communiquer doit tendre vers 0 au moins en  $\mathcal{O}\left(1/\sqrt{N}\right)$  lorsque  $N$  tend vers l'infini. Le problème fondamental des réseaux ad hoc sans fil est de trouver un compromis entre connectivité et parallélisme: il est nécessaire d'utiliser une puissance d'émission suffisante pour éviter d'avoir des noeuds isolés mais il faut aussi limiter cette puissance pour limiter les interférences et ainsi obtenir du parallélisme dans l'accès au médium.

L'objectif principal de cette étude est de proposer des protocoles de routage qui permettent d'atteindre la borne asymptotique pour la capacité et de dépasser le résultat déjà connu de  $\mathcal{O}\left(1/\sqrt{N\ln(N)}\right)$  dans le cadre des réseaux aléatoires sur le carré unité  $[0, 1] \times [0, 1]$  avec un trafic également aléatoire. Une première approche à l'aide d'un routage local utilisant une puissance d'émission variable permet de se rapprocher de cette borne sans toutefois l'atteindre en raison d'une mauvaise répartition du trafic due à l'aspect aléatoire du réseau. Une seconde approche fondée sur la théorie de la percolation aboutit à l'existence avec une forte probabilité d'un nombre suffisant de chemins disjoints formés de « petits sauts » et traversant le réseau. Ces chemins permettent d'acheminer l'ensemble du trafic avec suffisamment de parallélisme pour atteindre asymptotiquement un débit en  $\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$  pour chaque noeud. On s'appuie en outre sur des simulations afin de valider empiriquement les résultats de l'analyse théorique.

Ce travail a été partiellement financé par le projet IST/FET Aeolus et l'ANR-JC OSERA.

**Mots-clés :** réseau, 802.11, évaluation stochastique, capacité, simulation

# Stochastic evaluation and simulation of radio networks

**Abstract:** The capacity of ad hoc wireless networks scales poorly when the number  $N$  of nodes grows. If each node chooses another node to communicate with, the rate at which nodes communicate tends to 0 at least like  $\mathcal{O}\left(1/\sqrt{N}\right)$  as  $N$  tends to infinity. The key problem is to find a tradeoff between connectivity and parallelism: the transmission power of nodes must be high enough to avoid having isolated nodes but this power must not be too high to limit interferences and enable as many nodes as possible to have access to the medium.

The main goal of this work is to propose routing schemes that achieve the asymptotic upper bound of the capacity and therefore improve the already known result of  $\mathcal{O}\left(1/\sqrt{N\ln(N)}\right)$  for random networks on the unit square  $[0, 1] \times [0, 1]$  with a random traffic pattern. In a first approach, we study a local routing using a variable transmission power and we get close to the upper bound but we do not reach it because of the randomness of the network. In a second approach based on percolation theory, we prove the existence with high probability of many disjoint paths using « small hops » accross the network. These paths can transport in parallel all the traffic efficiently enough to provide each node with a throughput of  $\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$ . We also use simulations to confirm the results of the theoretic analysis.

This work has been partially supported by IST/FET project Aeolus and ANR-JC OSERA.

**Key-words:** network, 802.11, stochastic evaluation, capacity, simulation

# 1 Contexte de l'étude

Cette étude se place dans le cadre des réseaux ad hoc sans fil qui suivent la norme IEEE 802.11. L'objet de ce paragraphe est de rappeler quelques caractéristiques générales des réseaux sans fil ainsi que de la norme 802.11 qui gère les couches basses. On souhaite modéliser le fonctionnement pratique des réseaux ad hoc sans fil. On va donc successivement préciser les approximations effectuées aux niveaux des couches physiques, liaison et réseau.

## 1.0.1 Modèle de propagation et d'interférences

On considère que les noeuds peuvent émettre avec une portée variable, cette portée étant adaptée lors de chaque appel à la distance avec l'interlocuteur. Lorsqu'un noeud émet de façon à ce que le message soit correctement reçu à distance  $r$ , l'atténuation du signal avec la distance fait que tous les noeuds situés à une distance inférieure à  $r \cdot (1 + \Delta)$  de l'émetteur subissent des interférences. On suppose qu'il suffit d'une seule autre communication qui interfère au niveau d'un noeud pour empêcher toute réception correcte par ce noeud.

Il existe un autre modèle plus réaliste dans lequel un signal émis avec une puissance  $P_i$  par le noeud  $i$  est reçu par le noeud  $j$  avec une puissance  $\frac{P_i}{d(i,j)^\alpha}$  où  $d(i,j)$  est la distance entre le noeud  $i$  et le noeud  $j$  et  $\alpha \geq 2$ . Le message transmis de  $i$  à  $j$  est alors reçu avec succès si

$$\frac{\frac{P_i}{d(i,j)^\alpha}}{N + \sum_{k \neq i} \frac{P_k}{d(k,j)^\alpha}} \geq \beta$$

où  $N$  représente le niveau de bruit et  $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ . Ce deuxième modèle semble plus compliqué, surtout si les puissances sont variables mais [2] montre qu'on peut le ramener au premier sous certaines conditions, notamment dans le cas où le rapport  $P_{max}/P_{min}$  est borné. Toutefois, dans un modèle tout à fait réaliste, le rapport entre la puissance du signal écouté et le niveau de bruit et d'interférences influe non seulement sur la bonne réception du message mais également sur la capacité de la transmission en bits par secondes.

## 1.0.2 Accès au médium

Pour l'accès au médium, on s'inspire du principe du protocole « Carrier Sense Multiple Access/Collision Avoidance » (CSMA/CA) présent dans la norme 802.11 : quand le médium est libre, chaque noeud voulant émettre un paquet tire d'abord aléatoirement un temps d'attente  $w$  dans une fenêtre  $[0, window]$  où l'on suppose que  $window$  est stabilisé et donc que ce paramètre est fixé dans toute la suite. Cette hypothèse est acceptable dans la mesure où l'on s'intéresse au comportement stationnaire moyen du réseau et non à une phase transitoire. De plus, dans une phase stationnaire, on ne modifie pas le comportement global du réseau en fixant la même valeur de  $window$  pour tous les noeuds.

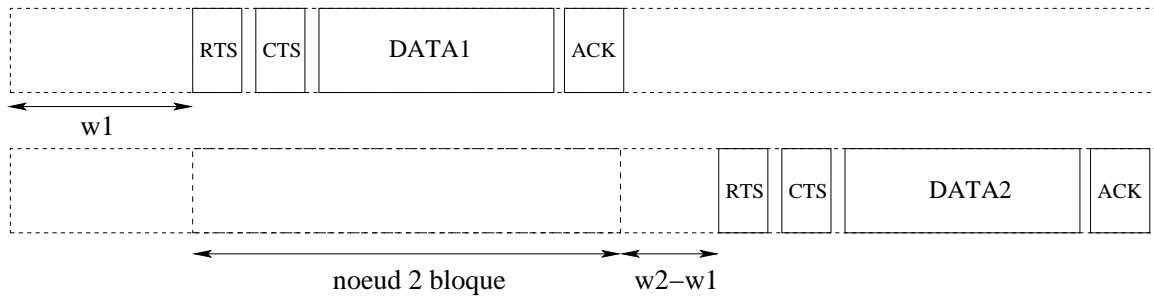


FIG. 1 – Déroulement des appels pour deux noeuds concurrents. Le noeud 1 accède au médium en premier car son temps d'attente  $w_1$  est le plus court. Le noeud 2 est bloqué pendant la transmission du noeud 1 puis il dégage son temps d'attente et accède au médium à son tour.

Si on classe alors les noeuds susceptibles d'être concurrents pour l'accès au médium par ordre croissant de  $w$ , c'est le plus « rapide » qui accède au médium et bloque les noeuds dont les communications risquent d'interférer. En pratique, l'émetteur envoie un paquet « Request To Send » (RTS) au récepteur de son message qui lui répond par un paquet « Clear To Send » (CTS) s'il est disponible pour cette communication. Les noeuds qui sont dans la zone entendent cet échange préliminaire de paquets et en déduisent s'ils doivent être bloqués. Il peut y avoir

une subtilité au niveau de cette « déduction » avec la portée variable des appels : les noeuds doivent donc connaître les positions précises de leurs voisins pour être capables de voir si leur propre communication risque d'interférer ou non avec celle qui s'annonce par le biais des paquets RTS et CTS. Après le retour du paquet CTS, l'émetteur procède à l'envoi des données et l'appel est conclu par le retour d'un message d'acquiescement (ACK). En parallèle dans le reste du réseau, le processus d'élection pour l'accès au médium se poursuit pour les noeuds qui ne sont pas déjà bloqués.

Lorsqu'un noeud a réussi à émettre, il retire un nouveau temps d'attente  $w$  pour le paquet suivant de sa file d'attente. Par contre, un noeud qui est bloqué « gèle » son temps d'attente. À sa tentative suivante (une fois que le médium est libéré), il utilise  $w - w_b$  où  $w_b$  est le temps d'attente du noeud qui l'a bloqué. On évite ainsi un phénomène de « famine » et on assure l'accès au médium pour chaque noeud voulant émettre.

### 1.0.3 Routage

Comme on s'intéresse aux réseaux ad-hoc, chaque noeud du réseau fait office de routeur et dispose d'une file d'attente de type FIFO pour gérer les paquets à transmettre. On choisit un modèle de file d'attente très simple car cela suffit pour dégager les tendances fortes dans le comportement du réseau et évaluer l'ordre de grandeur de sa capacité. Lorsqu'un noeud produit un nouveau paquet pour sa propre communication, il le place à la queue de sa file et le traite comme les autres paquets qui transitent par lui.

## 1.1 Evaluation de la capacité

L'objectif de cette étude est d'évaluer la capacité des réseaux ad hoc sans fil. On suppose que chaque noeud du réseau communique avec un autre noeud et on souhaite attribuer le même débit en bits par secondes (bps) à chacun des noeuds pour leur propre communication (on rappelle que les noeuds servent également de relais). On cherche alors le débit maximal attribué à chaque noeud que le réseau peut soutenir : c'est ce qu'on appelle la capacité du réseau. Ce paragraphe indique les éléments clés dans l'évaluation de cette capacité et présente l'état de l'art.

### 1.1.1 Compromis entre nombre de sauts et aire occupée

Lorsque les paquets effectuent des « sauts » de longueur  $r$ , le nombre de sauts pour arriver à destination est de l'ordre de  $1/r$  si la taille du réseau est une constante indépendante du nombre de noeuds  $n$  (on parle de réseau dense par opposition aux réseaux étendus où le diamètre du réseau augmente comme  $\sqrt{n}$ ). Le nombre total de bits par secondes à transmettre dans le réseau vaut alors  $\tau \cdot n \cdot 1/r$  où  $\tau$  représente le débit de chaque noeud en bps. On pourrait penser qu'il faut donc prendre  $r$  le plus grand possible. Pourtant, cela nuirait aux possibilités de parallélisme des communications car l'aire bloquée par un appel est proportionnelle à  $r^2$  et donc le nombre d'appels à chaque rounds est borné par un terme en  $1/r^2$ . Il semble par conséquent plus judicieux d'essayer de faire des petits sauts pour profiter au maximum du parallélisme offert par les réseaux ad hoc.

### 1.1.2 Une borne supérieure et un premier résultat constructif

Le premier résultat démontré par [2] est que pour un réseau de  $n$  noeuds, avec un positionnement des noeuds et un schéma de trafic arbitraires, le débit individuel de chaque noeud sera en  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ . La suite de l'article propose une façon d'atteindre cette borne supérieure avec un réseau dans lequel le positionnement des noeuds et le schéma de trafic sont bien choisis. Cependant, lorsque le réseau et le trafic deviennent aléatoires, [2] propose une façon constructive d'atteindre un débit individuel de seulement  $\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n \ln(n)}}\right)$ .

L'idée est de découper la surface occupée par le réseau en cellules d'aire de l'ordre de  $\frac{\ln(n)}{n}$  pour assurer la présence d'au moins un noeud dans chaque cellule. On fixe ensuite la portée des appels à une valeur de l'ordre de  $\sqrt{\frac{\ln(n)}{n}}$  en faisant en sorte que chaque noeud d'une cellule donnée puisse communiquer avec n'importe quel noeud d'une cellule voisine. Pour acheminer un paquet d'un noeud  $A$  à un noeud  $B$ , on trace alors la ligne droite  $(AB)$  et on fait transiter le paquet par un noeud de chacune des cellules successivement traversées par cette ligne. [2] montre que le nombre de chemins passant par une cellule donnée est en  $\mathcal{O}\left(\sqrt{n \ln(n)}\right)$  avec une probabilité qui tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Comme le nombre  $c_i$  de cellules qui interfèrent avec une cellule donnée est fini, un bon ordonnancement des appels permet d'obtenir le débit  $\tau$  annoncé. En effet, une

cellule doit transmettre au plus  $\tau \cdot cste \cdot \sqrt{n \ln(n)}$  bps. Il suffit de vérifier

$$\tau \cdot cste \cdot \sqrt{n \ln(n)} \leq \frac{1}{1 + c_i}$$

### 1.1.3 Comment atteindre la borne supérieure

La critique que l'on peut émettre à l'encontre du résultat de [2] est qu'il paraît inutile d'utiliser systématiquement une portée de l'ordre de  $\sqrt{\frac{\ln(n)}{n}}$  (voir [10] pour des résultats sur la connectivité dans les graphes aléatoires du plan) alors que seuls quelques noeuds sont isolés et ont besoin de cette portée pour être connectés au réseau. En suivant l'idée du paragraphe 1.1.1, on peut espérer améliorer la capacité du réseau et se rapprocher de la borne supérieure  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  en faisant des sauts de longueur variable, la plupart du temps de taille de l'ordre de  $1/\sqrt{n}$ , qui serait la distance entre deux noeuds voisins si le réseau était une grille régulière. Le gain en débit s'accompagnera d'une augmentation de la durée de parcours d'un chemin pour un paquet mais aussi d'une économie en énergie. En effet, l'énergie dépensée pour amener un paquet à destination est de l'ordre du nombre de sauts multiplié par le rayon d'un appel élevé à la puissance  $\alpha$ . Dans la solution de [2], on obtient une énergie de l'ordre de  $\left(\sqrt{\frac{\ln(n)}{n}}\right)^{\alpha-1}$  alors qu'on peut espérer obtenir  $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha-1}$ .

## 1.2 Modèle aléatoire

Ce paragraphe présente le cadre précis de l'analyse. Afin de poursuivre dans la lignée de [2] et d'atteindre si possible la borne supérieure, on choisit un modèle aléatoire à la fois pour le réseau et le trafic. Les distributions de Poisson que nous utilisons ici sont certes assez éloignées de la réalité en matière de réseaux aléatoires, mais elles permettent de dégager les tendances fortes dans le comportement des réseaux tout en rendant l'analyse accessible.

### 1.2.1 Réseau aléatoire

On se place sur le carré unité  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Les noeuds du réseaux sont distribués selon un processus de Poisson d'intensité  $n$ . On notera par la suite  $N$  la variable aléatoire qui compte le nombre total de points.  $N$  suit donc une loi de Poisson d'intensité  $n$ , c'est-à-dire, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbf{P}(N = k) = \frac{e^{-n} n^k}{k!}$$

On s'intéressera ici à des réseaux statiques, ce qui signifie que les coordonnées des noeuds sont fixées. Comme sur l'exemple de la figure 2, deux noeuds  $A$  et  $B$  sont reliés (communication possible) si

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \leq r_{max}$$

où  $r_{max}$  est de l'ordre de  $\sqrt{\frac{\ln(n)}{n}}$  pour assurer la connectivité du réseau comme le suggèrent les résultats présentés dans [10] sur les graphes aléatoires dans le plan.

Si on reprend les termes de l'article [1], le modèle choisi ici utilise la notion de « Unit Disk Graph » dans lequel deux noeuds sont reliés si et seulement si ils sont éloignés d'au plus  $r_{max}$ . Il existe des variantes et des généralisations de ce modèle : on peut par exemple prendre un modèle où deux noeuds sont systématiquement reliés s'ils sont éloignés d'au plus  $r_0$ , et sont reliés ou non (lien possible mais non nécessaire) si leur distance est comprise entre  $r_0$  et  $r_{max}$ . Cela permet de modéliser notamment la présence d'obstacles sur le terrain. On a préféré ici un modèle simplifié pour faciliter l'analyse.

### 1.2.2 Trafic et routage

Le schéma de trafic principalement étudié dans cette étude est un schéma que l'on qualifiera de « one to one » : chaque noeud tire aléatoirement un interlocuteur parmi tous les autres noeuds, sachant que ce n'est pas symétrique. On pourra aussi envisager le cas où tout le monde parle à tout le monde, c'est-à-dire qu'on s'intéresse aux communications entre tous les couples de noeuds (« all to all »).

On peut classer en deux types généraux les routages qui seront utilisés en fonction des informations sur le réseau que les noeuds doivent posséder :



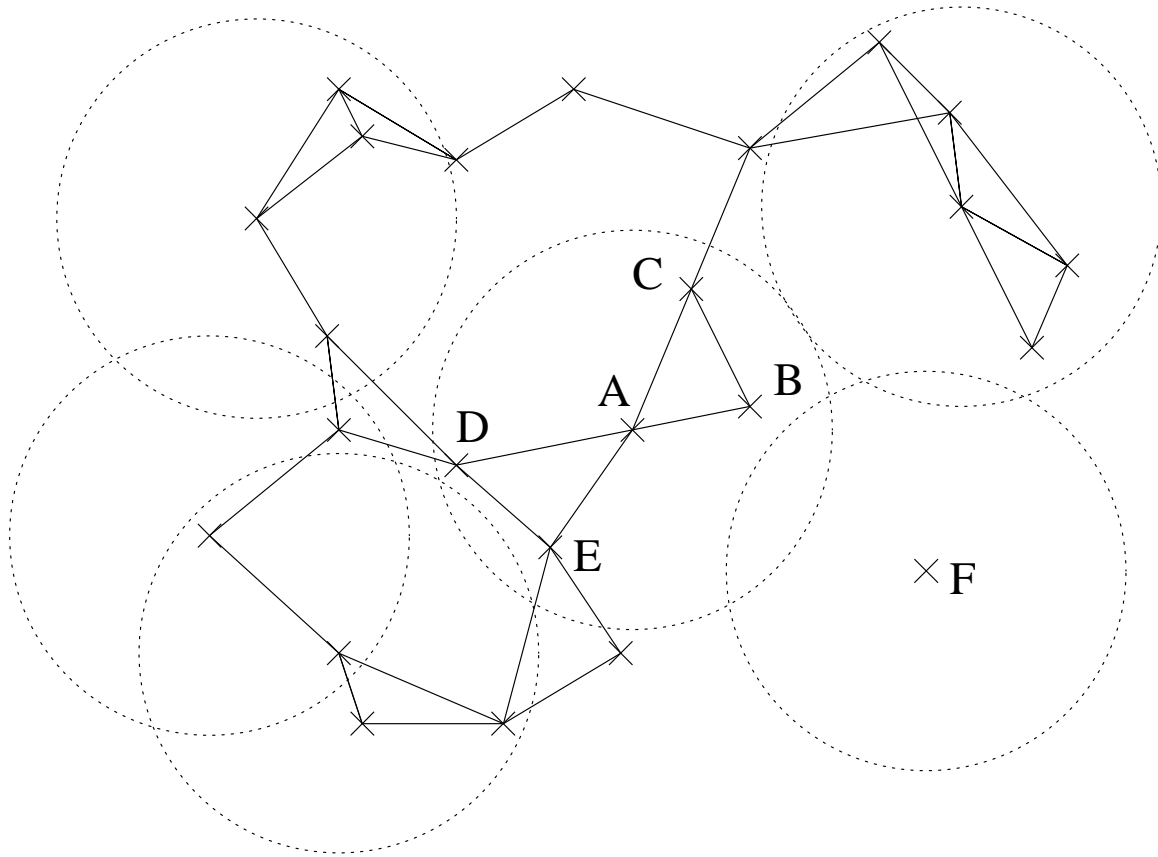


FIG. 2 – Exemple de réseau : le noeud A est relié aux noeuds B, C, D et E mais le noeud F est isolé

- des routages de type local, comme celui présenté au paragraphe 2.1.1, où chaque noeud choisit le noeud suivant auquel envoyer un paquet parmi ses voisins en fonction des informations qu’il possède sur ses voisins et sur la destination finale du paquet.
- des routages de type global, élaborés par exemple selon un algorithme de plus court chemin (Dijkstra ou Bellman-Ford), avec  $d(A, B)^\alpha$  comme coût pour une arête entre deux noeuds A et B, où  $\alpha \geq 2$  afin de prendre en compte le coût énergétique d’un appel. Ce type de routage nécessite la connaissance complète du réseau.

Que le routage soit local ou global, on peut utiliser des algorithmes s’inspirant du routage sur une grille en effectuant par exemple un découpage en cellules du carré unité.

Les diverses variantes testées lors des simulations sont présentées plus en détails au paragraphe 4.2.1.

### 1.2.3 Analyse et simulation

On va s’intéresser dans la partie 2 à un routage local. L’analyse montre que ce routage permet de mettre en oeuvre les principes évoqués au paragraphe 1.1.1. Cependant, les simulations dont les résultats sont présentées dans la partie 4 montrent que les performances obtenues grâce à ce routage ne permettent pas tout à fait d’atteindre la borne supérieure de la capacité en  $\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ , notamment à cause d’un phénomène d’écart à la moyenne. La partie 3, qui fait appel à la théorie de la percolation, montre que l’on peut atteindre cette borne.

## 2 Analyse d'un routage local

### 2.1 Définition

#### 2.1.1 Principe

Le principe de ce routage se fonde sur le fait qu'un noeud ne possède des informations que sur ses voisins. La figure 3 représente la situation où un noeud  $A$  doit envoyer un paquet à un noeud  $B$ . Il faut trouver un noeud intermédiaire  $C$  à qui transmettre le paquet. L'idée est de choisir un noeud  $C$  qui permet d'aller dans la bonne direction tout en effectuant un saut dont la longueur est de l'ordre de  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  si c'est possible pour ne pas gaspiller des ressources en monopolisant l'accès au médium. On va donc considérer les voisins de  $A$  qui sont proches de l'axe  $(AB)$  avec un écart angulaire limité. On cherche un candidat  $C$  dans l'intersection entre le secteur angulaire et une bande circulaire de centre  $A$ . Si la zone est vide, on augmente l'épaisseur de la bande jusqu'à trouver un tel noeud  $C$ .

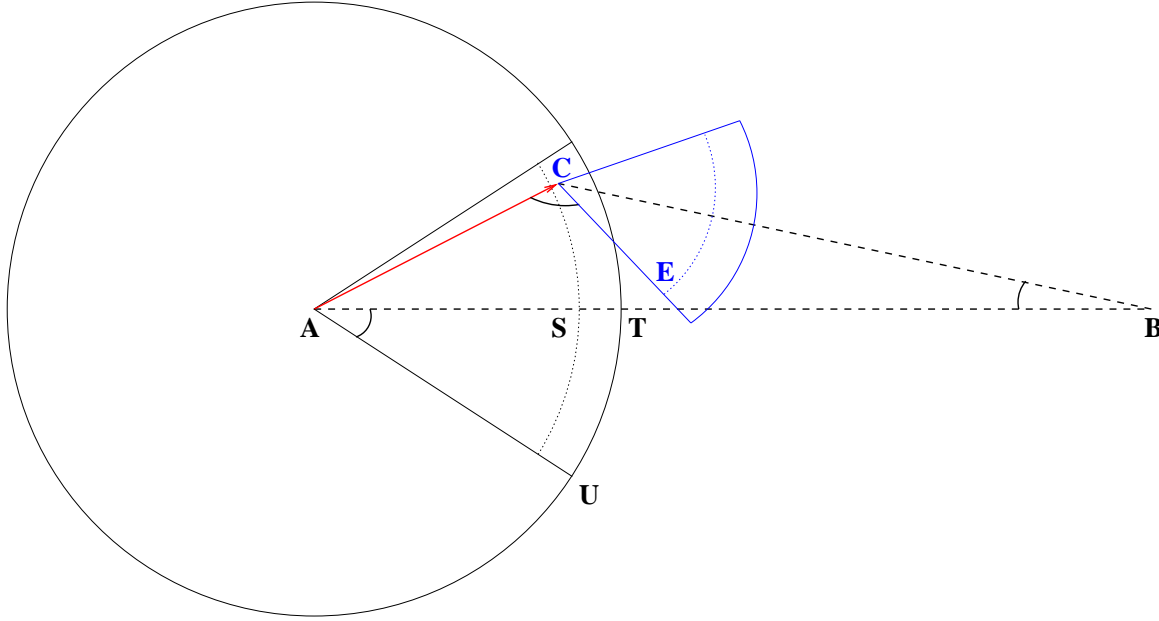


FIG. 3 – Protocole de routage local

On définit les paramètres suivant :

- $\theta$  est un angle appartenant à  $]0, \pi/2[$  définissant le secteur angulaire autour de l'axe  $(AB)$ . C'est un paramètre à déterminer. Sur la figure 3,  $\theta = \widehat{T AU}$ .
- $r_0$  et  $e$  sont également des paramètres à déterminer, respectivement le rayon minimum de l'appel et l'épaisseur de la bande considérée. Sur la figure 3,  $e = ST$ .
- $r_k$  représente le rayon minimum  $r_0$  augmenté  $k$  fois de l'épaisseur  $e$  : pour  $k \in \mathbb{N}$ , on a  $r_k = r_0 + k \cdot e$ . Sur la figure 3,  $r_k = AT$ .

Voici le détail de l'algorithme :

1. Initialement,  $k = 1$
2. Si  $AB < r_k$ ,  $A$  envoie directement le paquet à  $B$  et c'est terminé.
3. Sinon, on considère les voisins de  $A$  situés à une distance comprise entre  $r_{k-1}$  et  $r_k$ , s'écartant au plus d'un angle  $\theta$  de l'axe  $(AB)$ .
4. S'il existe de tels noeuds, on choisit un noeud  $C$  parmi les candidats (voir la remarque 1 ci-dessous).  $C$  prend alors la place de  $A$  dans le protocole et on recommence à l'étape 1 jusqu'à arriver au noeud  $B$ .
5. S'il n'existe pas de tels noeuds, on incrémente  $k$  et on reprend à l'étape 2 à condition que  $r_k \leq r_{max}$  (sinon, le protocole échoue).

**Remarque 1 :** à l'étape 4, on pourrait choisir le noeud  $C$  qui minimise l'angle  $\widehat{BAC}$  ou encore choisir un noeud aléatoirement parmi les candidats, mais on constate empiriquement que cela n'a pas une importance fondamentale dans le comportement de ce protocole de routage car il n'y a très souvent qu'un seul candidat.

**Remarque 2 :** le rayon qui sera choisi pour définir concrètement la puissance d'émission lors de l'appel de  $A$  vers  $C$  est le rayon  $r_k$  qui a permis d'atteindre  $C$  depuis  $A$ . La finesse de  $e$  est donc importante en vue de ne pas gaspiller des ressources, en l'occurrence l'accès au canal de communication mais aussi l'énergie.

**Remarque 3 :** les informations que doit posséder un noeud pour effectuer ce routage local sont les positions précises de ses voisins ainsi que celle du noeud destination mais on suppose que cette dernière information est contenue dans le paquet à transmettre. Un procédé similaire est évoqué dans [8].

### 2.1.2 Valeur des paramètres

Il y a deux critères pour le choix des paramètres  $r_0$ ,  $e$ , et  $\theta$  :

- on veut garantir la réussite du protocole, c'est-à-dire le fait que l'on va parvenir jusqu'au noeud  $B$  avec une très forte probabilité.
- on veut également garantir l'indépendance entre deux sauts successifs sur un chemin, c'est-à-dire faire en sorte que les zones successives où l'on cherche des noeuds intermédiaires ne s'intersectent pas, ceci afin de faciliter l'analyse.

On va chercher à satisfaire le deuxième critère et on verra que les valeurs obtenues permettent de satisfaire aussi le premier. En fait, on se contente même de ne satisfaire le deuxième critère que lorsque  $B$  est « loin », en pratique  $d(A, B) \geq 2r_{max}$  (il restera encore au minimum un saut à effectuer pour atteindre  $B$ ). En effet, quand  $n$  est grand, cela concerne la majorité des cas et le reste des cas est marginal.

On suppose donc  $AT \leq TB$  et  $\alpha = \widehat{ABC} \leq \theta$  (voir figure 3). On pose également

$$AT = r_k = r_{k-1} + e = r_0 + k \cdot e$$

$$\widehat{ACE} = \beta$$

$$AC = d \text{ avec } r_{k-1} \leq d \leq r_k$$

où  $C$  est le noeud atteint depuis  $A$  par le protocole.

Les zones considérées depuis le noeud  $A$  et depuis le noeud  $C$  s'intersectent si et seulement si  $E$  appartient au disque de centre  $A$  et de rayon  $r_k$ . On peut aussi supposer que  $CE = r_0$  car c'est le cas le pire. Il faut donc voir sous quelles conditions  $AE \geq r_k$  (pour le cas d'égalité, une intersection réduite à un point ne contient aucun noeud avec une probabilité 1 car l'aire est nulle).

On remarque que

$$\alpha + 2\theta + \beta \geq \pi$$

donc si  $\theta = \frac{\pi}{6}$ , on obtient

$$\beta \geq \frac{\pi}{2} \text{ et } \cos \beta \leq 0$$

Par ailleurs,

$$AE^2 = AC^2 + CE^2 - 2AC \cdot CE \cdot \cos \beta$$

$$AE^2 \geq d^2 + r_0^2 \geq r_{k-1}^2 + r_0^2$$

$$AE^2 - r_k^2 \geq r_{k-1}^2 - r_k^2 + r_0^2 = r_0^2 - e \cdot (2r_0 + e \cdot (2k - 1))$$

On pose  $f(k) = r_0^2 - e \cdot (2r_0 + e \cdot (2k - 1))$

$$f(k) \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \frac{1}{2} \left( \frac{r_0}{e} - 1 \right)^2$$

On en conclut que si  $k \geq k_{max} = \lfloor \frac{1}{2} \left( \frac{r_0}{e} - 1 \right)^2 \rfloor$  alors  $AE \geq r_k$

Si on prend

$$r_0 = \sqrt{\frac{2}{n}} \text{ et } e = \frac{1}{2\sqrt{2n \ln(n)}}$$

on peut aller jusqu'à

$$k_{max} = \lfloor 8 \ln n - 4\sqrt{\ln(n)} + 1/2 \rfloor$$

$$r_{max} = r_0 + e \cdot k_{max} \geq 2\sqrt{\frac{2 \ln(n)}{n}} - \frac{1}{4\sqrt{2n \ln n}}$$

L'aire totale  $\mathcal{A}$  potentiellement explorée depuis le noeud  $A$  vaut donc

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{6} (r_{max}^2 - r_0^2) \geq \frac{\pi}{6} \left( \frac{8 \ln(n)}{n} - \frac{3}{n} - \frac{1}{32n \ln(n)} \right)$$

et la probabilité d'un échec du protocole (ce qui correspond au cas où la zone d'aire  $\mathcal{A}$  ne contiendrait aucun point) vaut

$$\mathbf{P}(\text{échec}) = \exp(-\mathcal{A} \cdot n) \leq \exp\left(\frac{-\pi}{6} \left( 8 \ln(n) - 3 - \frac{1}{32 \ln(n)} \right)\right)$$

Cette probabilité est décroissante en  $n$ . Elle vaut environ  $2 \cdot 10^{-8}$  pour  $n = 100$  et  $1.3 \cdot 10^{-12}$  pour  $n = 1000$  à titre d'ordre de grandeur. On vérifie donc très bien les critères voulus.

## 2.2 Distribution du rayon d'un appel

### 2.2.1 Loi de probabilité

Dans le protocole du paragraphe 2.1.1, on veut étudier la variable aléatoire  $K$  qui indique la valeur de  $k$  jusqu'à laquelle il faut monter pour trouver un point  $C$  et avancer vers  $B$ .

L'aire de la  $k$ -ième bande considérée vaut

$$\mathcal{A}_k = \frac{\pi}{6} (r_k^2 - r_{k-1}^2) = \frac{\pi}{6} (2r_0 + (2k-1) \cdot e) \cdot e$$

$$\mathcal{A}_k = \frac{\pi}{6} \left( \frac{1}{n\sqrt{\ln(n)}} + \frac{2k-1}{8n \ln(n)} \right)$$

L'intensité du processus de Poisson dans la  $k$ -ième bande vaut

$$\lambda_k = n \cdot \mathcal{A}_k = \frac{\pi}{6} \left( \frac{1}{\sqrt{\ln(n)}} + \frac{2k-1}{8 \ln(n)} \right)$$

On en déduit que pour  $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(\text{aucun point dans } \mathcal{A}_k) = \exp(-\lambda_k)$$

$$\mathbf{P}(\text{au moins un point dans } \mathcal{A}_k) = 1 - \exp(-\lambda_k)$$

$$p_k = \mathbf{P}(K = k) = \left( \prod_{i=1}^{k-1} \exp(-\lambda_i) \right) (1 - \exp(-\lambda_k))$$

$$p_k = \left( \exp \left( \sum_{i=1}^{k-1} -\lambda_i \right) \right) (1 - \exp(-\lambda_k))$$

$$p_k = \exp \left( \frac{-\pi}{6} \left( \frac{k-1}{\sqrt{\ln(n)}} + \frac{(k-1)^2}{8 \ln(n)} \right) \right) \left( 1 - \exp \left( \frac{-\pi}{6} \left( \frac{1}{\sqrt{\ln(n)}} + \frac{2k-1}{8 \ln(n)} \right) \right) \right)$$

**Remarque :** On ne s'est pas préoccupé ici des effets de bord qui arrivent lorsque le noeud  $A$  est proche du bord du carré unité, ce qui fait que la zone explorée par le protocole est en partie en dehors de ce carré.

### 2.2.2 Espérances

On peut désormais calculer l'espérance de  $K$

$$\mathbf{E}[K] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p_k$$

Si on pose pour  $k \geq 0$

$$q_k = \exp\left(\frac{-\pi}{6} \left(\frac{k}{\sqrt{\ln(n)}} + \frac{k^2}{8 \ln(n)}\right)\right)$$

on a  $p_k = q_{k-1} - q_k$  donc la somme est télescopique et on obtient

$$\mathbf{E}[K] = \sum_{k=1}^{\infty} k q_{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k q_k = \sum_{k=0}^{\infty} q_k$$

Une analyse de série permet de montrer que pour  $n \geq 100$

$$\mathbf{E}[K] = c_1(n) \sqrt{\ln(n)}$$

avec

$$c_1^- \leq c_1(n) \leq c_1^+ \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} c_1(n) = c_1^-$$

Les valeurs des constantes sont  $c_1^- \simeq 1.46$  et  $c_1^+ \simeq 1.70$

On peut maintenant calculer l'espérance de  $r_K$

$$\mathbf{E}[r_K] = r_0 + e \cdot \mathbf{E}[K]$$

$$\mathbf{E}[r_K] = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sqrt{2} + \frac{c_1(n)}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$\mathbf{E}[r_K] = \frac{c_2(n)}{\sqrt{n}}$$

avec

$$c_2^- \leq c_2(n) \leq c_2^+ \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} c_2(n) = c_2^-$$

Les valeurs des constantes sont  $c_2^- \simeq 1.93$  et  $c_2^+ \simeq 2.02$

L'ordre de grandeur de  $\mathbf{E}[r_K]$  correspond à ce que l'on souhaitait en définissant ce routage local au paragraphe 2.1.1. Outre l'espérance du rayon, il est également intéressant de connaître l'espérance du rayon au carré puisque c'est proportionnel à l'aire « occupée » par la transmission d'un paquet de  $A$  vers  $C$ .

$$\mathbf{E}[r_K^2] = \mathbf{E}\left[(r_0 + e \cdot K)^2\right]$$

$$\mathbf{E}[r_K^2] = r_0^2 + 2r_0e \cdot \mathbf{E}[K] + e^2 \cdot \mathbf{E}[K^2]$$

$$\mathbf{E}[r_K^2] = \frac{1}{n} \left( 2 + c_1(n) + \frac{\mathbf{E}[K^2]}{8 \ln(n)} \right)$$

Par un calcul similaire à celui effectué plus haut, on trouve

$$\mathbf{E}[K^2] = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q_{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q_k$$

$$\mathbf{E}[K^2] = 2 \sum_{k=0}^{\infty} k q_k + \sum_{k=0}^{\infty} q_k = 2 \sum_{k=1}^{\infty} k q_k + c_1(n) \sqrt{\ln(n)}$$

Une nouvelle analyse de série permet de montrer que pour  $n \geq 100$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq_k = c_3(n) \ln(n)$$

avec

$$c_3^- \leq c_3(n) \leq c_3^+ \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} c_3(n) = c_3^+$$

Les valeurs des constantes sont  $c_3^- \simeq 1.78$  et  $c_3^+ \simeq 1.80$

On en déduit que

$$\mathbf{E}[r_K^2] = \frac{1}{n} \left( 2 + c_1(n) \left( 1 + \frac{1}{8\sqrt{\ln(n)}} \right) + \frac{c_3(n)}{4} \right)$$

$$\mathbf{E}[r_K^2] = \frac{c_4(n)}{n}$$

avec

$$c_4^- \leq c_4(n) \leq c_4^+ \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} c_4(n) = c_4^\infty$$

Les valeurs des constantes sont  $c_4^- \simeq 3.9$ ,  $c_4^\infty \simeq 3.91$  et  $c_4^+ \simeq 4.25$

**Remarque :** Il est utile pour la suite de faire tous les calculs précédents conditionnellement à l'événement  $K \leq k_{max}$  dont la probabilité tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Les ordres de grandeur obtenus ci-dessus sont inchangés et les constantes quasi identiques.

## 2.3 Rapprochement de la destination

Lorsque l'on effectue un saut du noeud  $A$  vers le noeud  $C$ , si le rayon est  $r_K$ , on se rapproche au plus de  $r_K$  du noeud destination  $B$ , ceci arrivant bien évidemment dans le cas où  $C = T$  sur la figure 3. On veut essayer de calculer de combien la distance au noeud  $B$  va diminuer au minimum en passant de  $A$  à  $B$ .

On pose  $\delta = \frac{AB-BC}{r_K}$  et on rappelle l'hypothèse  $AB \geq 2r_{max} \geq 2r_K$

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \widehat{BAC}$$

Or  $r_K - e \leq AC \leq r_K$  et  $\widehat{BAC} \leq \frac{\pi}{6}$  donc

$$BC^2 \leq r_K^2 + AB^2 - \sqrt{3} \cdot AB \cdot (r_K - e)$$

$$BC \leq r_K \sqrt{1 + \left( \frac{AB}{r_K} \right)^2 - \sqrt{3} \cdot \frac{AB}{r_K} \cdot \left( \frac{r_K - e}{r_K} \right)}$$

On pose  $x = \frac{AB}{r_K} \geq 2$  et  $c = \frac{8}{3\sqrt{3}}$ , pour  $n \geq 100$  on a

$$\sqrt{3} \cdot \frac{r_K - e}{r_K} = \sqrt{3} \cdot \frac{r_0 + (K-1)e}{r_0 + Ke} \geq \sqrt{3} \cdot \frac{r_0}{r_0 + e}$$

$$\sqrt{3} \cdot \frac{r_K - e}{r_K} \geq \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2\ln(n)}}} = \sqrt{3} \cdot \frac{8}{8 + \frac{2}{\sqrt{\ln(n)}}} \geq c$$

$$\delta \geq x - \sqrt{1 + x^2 - cx} = g(x)$$

On montre que la fonction  $g$  est croissante sur  $[1, +\infty[$  donc

$$\delta \geq g(2) = 2 - \sqrt{5 - \frac{16}{3\sqrt{3}}} = \delta_m$$

avec  $\delta_m \simeq 0.614$ . En résumé, on a

$$\delta_m \leq \delta \leq 1$$

## 2.4 Nombre de sauts sur un chemin et aire occupée par une communication

Quand  $d(A, B) \geq 2r_{max}$ , on souhaite estimer le nombre moyen de sauts nécessaires pour se rapprocher à portée  $2r_{max}$  de  $B$  en partant de  $A$ . Ce nombre de sauts représente le délai minimum pour qu'un paquet parvienne à destination. On note  $(X_j)_{j \geq 0}$  la suite de noeuds sur le chemin de  $A$  vers  $B$ , avec  $X_0 = A$ . On note  $T$  le temps d'arrêt suivant

$$T = \min\{j \in \mathbf{N} / d(X_j, B) \leq 2r_{max}\}$$

qui existe à condition que le protocole n'échoue pas ! Si on note  $R_j$  le rayon d'émission utilisé pour sauter de  $X_{j-1}$  à  $X_j$ , on obtient l'encadrement suivant

$$d(A, B) - 2r_{max} \leq \sum_{j=1}^T R_j \leq \frac{d(A, B)}{\delta_m}$$

Les variables aléatoires  $R_j$  sont indépendantes grâce au résultat du paragraphe 2.1.2. Elles sont de plus identiquement distribuées sur l'ensemble fini des rayons possibles. L'identité de Wald donne alors le résultat suivant

$$\begin{aligned} d(A, B) - 2r_{max} &\leq \mathbf{E}[T] \cdot \mathbf{E}[R_1] \leq \frac{d(A, B)}{\delta_m} \\ \frac{d(A, B) - 2r_{max}}{c_2(n)} \sqrt{n} &\leq \mathbf{E}[T] \leq \frac{d(A, B)}{\delta_m \cdot c_2(n)} \sqrt{n} \end{aligned}$$

Le nombre de sauts restants à effectuer pour atteindre effectivement le noeud  $B$  est au plus de l'ordre de  $2r_{max}/r_0$ , c'est-à-dire de l'ordre de  $\sqrt{\ln(n)}$ .

Un calcul similaire donne l'aire totale occupée par une communication que l'on définit comme la somme des aires des disques successifs occupés par la transmission d'un paquet le long du chemin. Cette aire vaut

$$\mathcal{A}_{A \rightarrow B} = \sum_{j=1}^T \pi(1 + \Delta)^2 R_j^2 \gamma_j + \mathcal{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

Le terme en  $\ln(n)/n$  provient des derniers sauts pour rejoindre effectivement le noeud  $B$ . Le facteur  $\gamma_j$  provient du caractère symétrique d'un appel (échanges de paquets pour établir l'appel et retour d'un message d'acquiescement) : l'aire occupée pour effectuer le  $j$ -ième saut de  $A$  à  $C$  correspond à la réunion des disques de rayon  $R_j$  centrés en  $A$  et  $C$ . Si on pose

$$\gamma(\theta) = 2 \left( 1 - \frac{1}{\pi} \left( \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right)$$

Un calcul d'aires donne

$$\gamma^- \leq \gamma_j \leq \gamma^+$$

où  $\gamma^- = \gamma\left(\arccos\left(\frac{r_0 + \epsilon}{3r_0}\right)\right) \geq 1.41$  et  $\gamma^+ = \gamma\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) \leq 1.42$

On en déduit l'ordre de grandeur de  $\mathcal{A}_{A \rightarrow B}$

$$\mathbf{E}[\mathcal{A}_{A \rightarrow B}] = \pi(1 + \Delta)^2 \mathbf{E}[R_j^2 \gamma_j] \cdot \mathbf{E}[T] + \mathcal{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

or

$$\mathbf{E}[R_j^2] \gamma_- \leq \mathbf{E}[R_j^2 \gamma_j] \leq \mathbf{E}[R_j^2] \gamma_+$$

on obtient donc

$$c_5(n) \gamma_- \frac{(d(A, B) - 2r_{max})}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \leq \mathbf{E}[\mathcal{A}_{A \rightarrow B}] \leq c_5(n) \gamma_+ \frac{d(A, B)}{\delta_m \sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

où

$$c_5(n) = \frac{c_4(n) \pi (1 + \Delta)^2}{c_2(n)}$$

$$c_5^- \leq c_5(n) \leq c_5^+ \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} c_5(n) = c_5^\infty = \frac{c_4^\infty \pi (1 + \Delta)^2}{c_2^\infty}$$

Les valeurs des constantes sont  $c_5^- \simeq 13.64$ ,  $c_5^\infty \simeq 14.32$  et  $c_5^+ \simeq 15.57$

## 2.5 Estimation du trafic et de la charge

On appelle ici trafic pour un noeud donné le nombre de chemins qui passent par ce noeud (sauf s'ils se terminent à ce noeud). Le trafic total est alors la somme des longueurs des chemins pour l'ensemble des communications entre des couples de noeuds  $(A, B)$ . Si on fait circuler un paquet pour chacune de ces communications, cela correspond au nombre total d'accès au médium pour amener l'ensemble de ces paquets à destination. On se place dans le cadre all to all.

Soit  $T_{total}$  le trafic total,  $T_{ij}$  le nombre de sauts sur le chemin entre le noeud  $i$  et le noeud  $j$  (on suppose que l'on a numéroté les noeuds de 1 à  $N$ ).

$$T_{total} = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} T_{ij}$$

Une première majoration rapide donne

$$\begin{aligned} T_{ij} &\leq \frac{d(i, j)}{g(1) \cdot r_0} \leq \frac{\sqrt{2}}{g(1)} \sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{\sqrt{n}}{g(1)} \\ T_{total} &\leq N(N-1) \frac{\sqrt{n}}{g(1)} \\ \mathbf{E}[T_{total}] &\leq n^2 \frac{\sqrt{n}}{g(1)} \end{aligned}$$

avec  $g(1) \simeq 0.32$  (voir paragraphe 2.3)

Par ailleurs, on a dans la somme de l'ordre de  $n^2$  termes de la forme  $cste \cdot d(i, j) \sqrt{n}$  et on considère l'ensemble des couples parmi environ  $n$  points distribués aléatoirement sur le carré unité donc c'est la valeur moyenne de la distance  $d(i, j)$  qui va intervenir. Un calcul d'ordre de grandeur en s'affranchissant notamment des cas où le chemin passe au bord du carré unité donne alors le résultat suivant

$$\mathbf{E}[T_{total}] = c_6(n) n^2 \sqrt{n} + \mathcal{O}\left(n^2 \sqrt{\ln(n)}\right)$$

Si on note  $\bar{d} \simeq 0.52$  la distance moyenne entre deux points tirés aléatoirement sur le carré unité, on a

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d}}{c_2(n)} &\leq c_6(n) \leq \frac{\bar{d}}{\delta_m c_2(n)} \\ 0.25 &\leq c_6(n) \leq 0.44 \end{aligned}$$

Un meilleur indicateur du niveau de sollicitation d'un noeud pour l'acheminement des paquets nécessite cependant de tenir compte des chemins qui passent à proximité de ce noeud et qui vont entrer en concurrence avec ce dernier pour l'accès au canal de communication. On définit donc la charge d'un noeud comme le nombre de disques correspondant à des accès au canal qui contiennent ce noeud. Ces disques peuvent appartenir à n'importe quel chemin, qu'il passe par le noeud considéré ou non. Pour un intervalle de temps  $t$ , le nombre d'accès au canal de communication dans le voisinage du noeud  $i$  vaut environ  $t \cdot \tau \cdot C_i$ , où  $\tau$  est le débit pour chaque communication en paquets par unité de temps. En première approximation, ce nombre doit rester proportionnel à  $t$ , ce qui signifie que l'inverse de la charge fournit une borne pour le débit des communications sur le réseau à une constante près. Si on reprend le calcul du paragraphe 2.4, on peut estimer l'ordre de grandeur de  $C_{totale}$ , la charge totale du réseau, puis de la charge individuelle moyenne pour un noeud en divisant la charge totale par  $n$ .

$$C_{totale} = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} N(\mathcal{A}_{ij})$$

où  $N(\mathcal{A}_{ij})$  représente le nombre de points dans la zone occupée par la communication du noeud  $i$  vers le noeud  $j$ . Comme il y a en moyenne  $n$  noeuds par unité de surface, on peut prévoir en ignorant les effets de bords que l'on va obtenir dans la somme environ  $n^2$  termes de la forme  $n \cdot \mathbf{E}[\mathcal{A}_{ij}]$ . A nouveau, c'est la valeur moyenne de  $d(i, j)$  qui intervient et on obtient

$$\mathbf{E}[C_{totale}] = c_7(n) n^2 \sqrt{n} + \mathcal{O}(n^2 \ln(n))$$



avec

$$c_5(n)\gamma_-\bar{d} \leq c_7(n) \leq \frac{c_5(n)\gamma_+\bar{d}}{\delta_m}$$

$$9.96 \leq c_7(n) \leq 18.72$$

## 2.6 Bilan sur le routage local

Si un schéma de trafic one to one avec le choix aléatoire d'un interlocuteur pour chaque noeud échantillonne bien le schéma all to all, on prévoit d'après le résultat du paragraphe précédent que l'on aura une charge individuelle moyenne de l'ordre de  $\sqrt{n}$ , ce qui laisse espérer une capacité du réseau en  $\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ . Cependant, ce calcul ne donne que des valeurs moyennes et il serait bon d'étudier la concentration de la distribution de la charge autour de sa moyenne : les résultats des simulations présentés dans la partie 4 indiquent à ce niveau un écart à la moyenne qui augmente avec  $n$ . Le routage local, tout en étant très simple et calculé de manière distribuée avec très peu d'informations sur le réseau, permet donc un gain en énergie puisque l'on effectue des « petits sauts » mais il ne permet pas d'atteindre tout à fait la borne souhaitée en matière de capacité.

### 3 Utilisation de la théorie de la percolation

#### 3.1 Principe

Le fait d'utiliser une portée trop grande pour les appels entre les noeuds nuit au parallélisme des communications dans un réseau ad hoc sans fil mais une portée trop faible ne permet pas d'avoir une connectivité totale du réseau. Il y a donc un compromis à effectuer et la partie 2 cherche à résoudre ce problème en utilisant une puissance d'émission variable et adaptée lors de chaque appel à la disposition locale des noeuds. Tout en conservant la volonté d'effectuer des appels de courte portée, on peut adopter une démarche légèrement différente. L'idée est de fixer à priori la portée des appels à une valeur de l'ordre de  $1/\sqrt{n}$ . Certains noeuds du réseau vont se retrouver isolés pour l'instant mais le but est de montrer l'existence d'un nombre suffisant de chemins disjoints qui traversent le carré unité de part en part et qui peuvent acheminer les paquets en parallèle. Cette mise en évidence de chemins se fonde sur la théorie de la percolation développée dans [11]. On s'inspire ici de l'article [7] qui étudie un modèle assez proche. Dans un graphe où l'on ouvre une arête entre deux noeuds avec probabilité  $p$ , la théorie de la percolation s'intéresse à la probabilité d'apparition de chemins qui traversent le graphe en fonction de  $p$ . Cela a notamment des applications en physique statistique.

#### 3.2 Existence de chemins disjoints

On applique d'abord une grille oblique sur le carré unité et on normalise le côté d'une case à  $c/\sqrt{n}$  où  $c > 0$  est une constante à déterminer. La présence de noeuds du réseau aléatoire dans une case signifie qu'il est possible pour un paquet de traverser cette case en effectuant des sauts de taille de l'ordre de  $1/\sqrt{n}$ . Comme le montre la figure 4, on attribue alternativement aux cases une direction horizontale ou verticale et on crée pour chaque case une arête qui la traverse dans cette direction. Dans la nouvelle grille  $G_m$  ainsi obtenue, on ouvre alors les arêtes situées dans les cases contenant au moins un noeud du réseau aléatoire sous-jacent. Les autres arêtes restent fermées. Les noeuds du réseau aléatoire étant issus d'un processus de Poisson d'intensité  $n$ , on a

$$\mathbf{P}(\text{une case contient au moins un noeud}) = 1 - e^{-c^2}$$

Les arêtes sont de longueur  $\frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$  et la grille  $G_m$  a pour dimensions (en nombre d'arêtes)  $m \times m$  avec  $m = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}c}$ . Un chemin sur la grille  $G_m$  est dit ouvert, respectivement fermé, si toutes les arêtes qu'il emprunte sont ouvertes, respectivement fermées. On découpe alors cette grille en rectangles horizontaux de dimensions  $\ln(m) \times m$ . On veut montrer l'existence de  $\beta \ln(m)$  chemins ouverts disjoints qui traversent un tel rectangle  $R_m$  de gauche à droite. Précisément, on cherche  $0 < \beta < 1$  tel que la probabilité d'existence de ces chemins tende vers 1 quand  $m$  tend vers l'infini.

On considère maintenant le graphe dual  $R_m^*$  du graphe  $R_m$ . Pour construire ce dual, il suffit d'échanger les orientations horizontales et verticales des cases : une case qui contient une arête horizontale (respectivement verticale) ouverte pour  $R_m$  contient une arête verticale (respectivement horizontale) ouverte pour  $R_m^*$ . On appelle alors  $A_m$  l'événement « il existe un chemin ouvert qui traverse  $R_m$  de son bord gauche jusqu'à son bord droit » et  $B_m$  l'événement « il existe un chemin fermé qui traverse  $R_m^*$  de son bord supérieur jusqu'à son bord inférieur ». On voit tout de suite que  $A_m \cap B_m = \emptyset$  sous peine d'avoir une case contenant une arête ouverte de  $R_m$  et une arête fermée de  $R_m^*$ , ce qui est contradictoire. En fait,  $A_m$  et  $B_m$  sont complémentaires, d'où  $\mathbf{P}(A_m) + \mathbf{P}(B_m) = 1$ .

On oublie un instant le processus de Poisson et on suppose que les arêtes de  $G_m$  sont ouvertes indépendamment avec probabilité  $0 < q < 1$ . On note  $\mathbf{P}_q$  la mesure de probabilité associée à  $q$ . Un simple comptage de chemins permet de majorer la probabilité de l'existence d'un chemin ouvert dans  $R_m^*$  partant d'un sommet  $i$  situé sur le bord supérieur et atteignant le bord inférieur.

$$\mathbf{P}_q(i \leftrightarrow \text{bord inférieur de } R_m^*) \leq (3q)^{\ln(m)}$$

Les arêtes sont ouvertes avec probabilité  $q$  et donc fermées avec probabilité  $1 - q$ . On obtient donc

$$\mathbf{P}_q(B_m) \leq \sum_{i=1}^m \mathbf{P}_{1-q}(i \leftrightarrow \text{bord inférieur de } R_m^*)$$

$$\mathbf{P}_q(B_m) \leq \sum_{i=1}^m (3(1-q))^{\ln(m)}$$

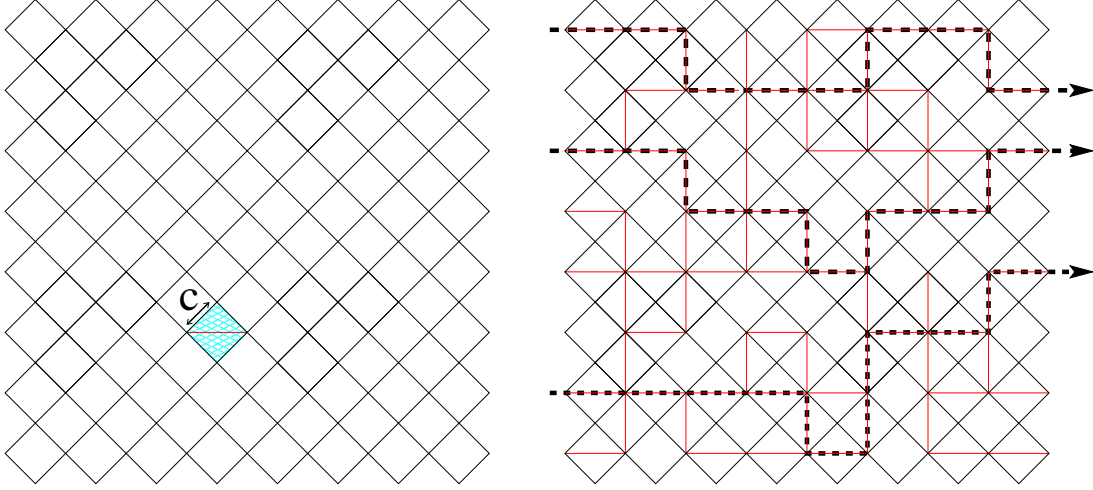


FIG. 4 – La figure de gauche montre le découpage de la surface en une grille dont les cases sont de côté  $c$ . On ouvre l'arête associée à une case (par exemple la case coloriée en bleu) si celle-ci contient au moins un point issu du processus de Poisson. La figure de droite montre un exemple de réseau ainsi obtenu et des chemins qui le traversent. Les arêtes ouvertes sont en rouge et les chemins en pointillés noirs

$$\mathbf{P}_{\mathbf{q}}(B_m) \leq m \cdot (3(1-q))^{\ln(m)}$$

Le résultat clé suivant provient de [11] : si on note  $I_k(A_m)$  l'événement « il existe  $k$  chemins disjoints ouverts définis comme dans  $A_m$  », alors pour tous  $0 < q < p < 1$  et  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$1 - \mathbf{P}_{\mathbf{p}}(I_k(A_m)) \leq \left( \frac{p}{p-q} \right)^k \cdot (1 - \mathbf{P}_{\mathbf{q}}(A_m))$$

On revient alors au modèle poissonien : on a  $p = 1 - e^{-c^2}$  et on prend  $q = 2p - 1 = 1 - 2e^{-c^2}$ , ce qui donne

$$\frac{p}{p-q} = e^{c^2} - 1 < e^{c^2}$$

On en déduit que pour  $\beta > 0$

$$1 - \mathbf{P}_{\mathbf{p}}(I_{\beta \ln(m)}(A_m)) \leq \left( e^{c^2} \right)^{\beta \ln(m)} (1 - \mathbf{P}_{\mathbf{q}}(A_m)) = \left( e^{c^2} \right)^{\beta \ln(m)} \mathbf{P}_{\mathbf{q}}(B_m)$$

$$1 - \mathbf{P}_{\mathbf{p}}(I_{\beta \ln(m)}(A_m)) \leq m^{\beta c^2 + 1} (6e^{-c^2})^{\ln(m)}$$

$$1 - \mathbf{P}_{\mathbf{p}}(I_{\beta \ln(m)}(A_m)) \leq m^{(\beta-1)c^2 + \ln(6) + 1}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{p}}(I_{\beta \ln(m)}(A_m)) \geq 1 - m^{(\beta-1)c^2 + \ln(6) + 1}$$

Ceci se produit de manière indépendante dans les  $\frac{m}{\ln(m)}$  rectangles horizontaux donc la probabilité d'avoir l'événement  $I_{\beta \ln(m)}(A_m)$  simultanément dans chacun de ces rectangles vaut

$$\left( \mathbf{P}_{\mathbf{p}}(I_{\beta \ln(m)}(A_m)) \right)^{\frac{m}{\ln(m)}} \geq \left( 1 - m^{(\beta-1)c^2 + \ln(6) + 1} \right)^{\frac{m}{\ln(m)}}$$

Si  $(\beta - 1)c^2 + \ln(6) + 1 \leq -1$ , l'expression ci-dessus tend vers 1 quand  $m$  tend vers l'infini. A condition que  $c^2 > \ln(6) + 2$ , il suffit donc de prendre

$$\beta = 1 - \frac{\ln(6) + 2}{c^2} > 0$$

On note que le même raisonnement s'applique à des rectangles verticaux. Par conséquent, on a mis en évidence l'existence avec très une forte probabilité d'un ensemble de  $\beta m = \beta \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}c}$  chemins disjoints horizontaux et autant de chemins verticaux qui traversent le réseau en effectuant des sauts de taille au plus  $\frac{2\sqrt{2}}{n}c$  si on choisit un noeud relais dans chaque case non vide de la grille. On cherche désormais à utiliser cet ensemble de chemins pour élaborer un routage sur l'ensemble du réseau aléatoire.

### 3.3 Routage et organisation des accès au médium

Si l'on dispose de chemins horizontaux et verticaux qui traversent le carré unité, le routage devient simple. Quand un noeud  $A$  veut envoyer un paquet à un noeud  $B$ , il suffit d'envoyer ce paquet sur un chemin horizontal passant à proximité de  $A$ , puis de transmettre le paquet le long de ce chemin horizontal jusqu'à l'intersection avec un chemin vertical passant à proximité de  $B$  et enfin de transmettre le paquet le long de ce chemin vertical pour atteindre  $B$ . Ce type de routage est communément appelé « XY ».

On suppose l'existence de  $\beta m$  chemins disjoints horizontaux. On peut découper le carré unité en  $\beta m$  bandes horizontales d'épaisseur  $\frac{1}{\beta m}$  et de longueur 1. Les rectangles  $R_m$  du découpage effectué dans le raisonnement du paragraphe précédent regroupent chacun  $\beta \ln(m)$  bandes consécutives. On peut alors associer un chemin horizontal à chaque bande et aux noeuds du réseau aléatoire qu'elle contient. Un noeud  $A$  est donc associé à un chemin qui passe à une distance majorée par la hauteur des rectangles  $R_m$  à savoir  $\ln(m)/m$ . Pour envoyer un paquet,  $A$  effectue un appel vers le noeud le plus proche de lui sur ce chemin. On a ainsi attribué au noeud  $A$  un point d'accès vers le système de chemins disjoints (voir figure 5). On peut également attribuer un point de sortie vers  $A$  depuis ce système de chemins en effectuant le raisonnement sur les chemins verticaux. Les appels pour accéder au système ou en sortir sont de portée au plus

$$\frac{\ln(m)}{m} = \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \ln \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}c} \right)$$

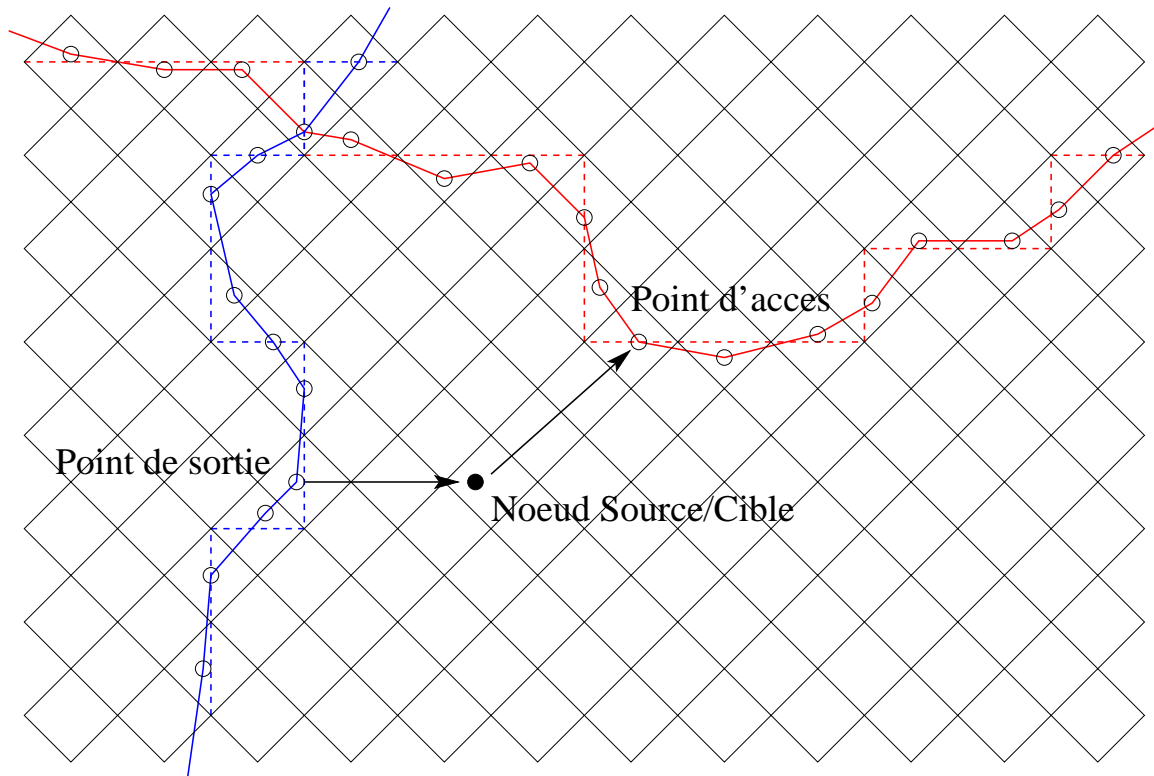


FIG. 5 – Connexion d'un noeud au système de chemins. Le chemin horizontal associé au noeud est en rouge et le chemin vertical en bleu

On peut considérer que le type de routage proposé ici est global car il nécessite une recherche de chemins disjoints. On peut cependant remarquer qu'une fois les chemins établis, les noeuds n'ont pas besoin de connaître

entièrement le réseau. Si on numérote dans l'ordre de leurs positions sur la grille les chemins horizontaux et verticaux, il suffit des informations suivantes :

- chaque noeud du système de chemins connaît les noeuds qui lui sont associés pour pouvoir traiter les paquets émis par les noeuds sources et entrant dans le système, ainsi que les paquets qui sont arrivés à leur point de sortie du système.
- chaque noeud d'un chemin horizontal connaît le numéro des chemins verticaux qui passent le plus près de lui à gauche et droite (ou simplement le numéro du chemin vertical qui passe par lui) pour pouvoir effectuer la transition entre le déplacement horizontal et le déplacement vertical d'un paquet.
- chaque noeud du réseau connaît le numéro du chemin vertical qui permet d'accéder à son interlocuteur pour pouvoir l'indiquer dans un paquet. Ce numéro et les identités de la source et du destinataire du paquet suffisent pour que le paquet soit dirigé correctement par les noeuds du système de chemins.

Pour organiser les communications, l'article [7] propose un ordonnancement des appels en trois phases.

1. dans un premier temps, les noeuds émettent des paquets pour leur propre communication et les envoient vers leur point d'accès au système de chemins
2. ensuite, on fait avancer les paquets vers leur point de sortie dans le système de chemins selon le routage décrit plus haut (déplacement horizontal puis déplacement vertical)
3. enfin, les paquets arrivés à leur point de sortie sont envoyés vers leur destination finale

On préfère ici utiliser un accès au médium géré de manière distribuée par le protocole CSMA/CA (voir partie 1) et on laisse tous les types d'appels se faire en même temps. On va donc utiliser à nouveau l'indicateur donné par la charge sur les noeuds (voir paragraphe 2.5) pour estimer la capacité du réseau.

### 3.4 Estimation du trafic et de la charge

On souhaite borner la charge individuelle sur les noeuds du réseau (en reprenant la définition donnée en 2.5).

On montre d'abord que si l'on a un processus de Poisson d'intensité  $n$  sur une zone d'aire  $\mathcal{A}$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\mathcal{A} = +\infty$ , alors le nombre  $N(\mathcal{A})$  de points dans  $\mathcal{A}$  vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(N(\mathcal{A}) \leq 2n\mathcal{A}) = 1$$

On applique pour cela l'inégalité de Markov avec la fonction exponentielle qui est positive et croissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

$$\mathbf{P}(N(\mathcal{A}) > 2n\mathcal{A}) \leq e^{-2n\mathcal{A}} \mathbb{E} \left[ e^{N(\mathcal{A})} \right]$$

Or

$$\mathbb{E} \left[ e^{N(\mathcal{A})} \right] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-n\mathcal{A}} e^k \frac{(n\mathcal{A})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-n\mathcal{A}} \frac{(n\mathcal{A}e)^k}{k!} = e^{-n\mathcal{A}(1-e)}$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}(N(\mathcal{A}) > 2n\mathcal{A}) \leq e^{-n\mathcal{A}(3-e)}$$

On conclut en remarquant que le majorant tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

On dira qu'un événement se produit avec une forte probabilité si sa probabilité tend vers 1 quand  $n$  tend vers l'infini. On rappelle que les chemins horizontaux obtenus au paragraphe 3.2 transportent les paquets provenant des noeuds d'une bande d'épaisseur  $\frac{1}{\beta m}$  et donc d'aire  $\frac{1}{\beta m}$ . Comme  $\frac{n}{\beta m} = \frac{c\sqrt{2n}}{\beta}$ , le résultat démontré ci-dessus permet d'affirmer qu'avec forte probabilité ces noeuds sont au plus  $\frac{2c\sqrt{2n}}{\beta}$ . Un chemin horizontal voit donc passer des paquets provenant d'au plus  $\frac{2c\sqrt{2n}}{\beta}$  noeuds avec forte probabilité.

Dans le cas des chemins verticaux, on veut savoir combien de paquets vont être adressés aux noeuds d'une bande verticale. On doit alors tenir compte de l'aléatoire dans le schéma de trafic one to one. En effet, sachant le résultat du processus poissonien, on choisit indépendamment l'interlocuteur (la « cible ») de chaque noeud avec une probabilité uniforme. La répartition des noeuds cibles sur le carré unité est alors relativement uniforme. Supposons qu'une bande verticale donnée contient  $N_v$  noeuds et que le réseau en contient  $N_r$  en tout. Si on appelle  $X_i$  la variable aléatoire qui vaut 1 si le noeud  $i$  choisit un noeud de la bande verticale comme cible et 0 sinon, on a pour tout  $1 \leq i \leq N_r$ ,

$$p_i = \mathbf{P}(X_i = 1) \leq \frac{N_v}{N_r - 1}$$

Le nombre de noeuds  $N_c$  de la bande verticale qui sont des noeuds cibles (on remarque d'ailleurs qu'un noeud peut l'être plusieurs fois) vérifie :

$$N_c = \sum_{i=1}^{N_r} X_i$$

Pour  $\gamma_1 > 0$ , conditionnellement au processus poissonien (on note  $\mathbf{P}_{\text{cond}}$  la probabilité conditionnelle), l'inégalité de Markov donne

$$\mathbf{P}_{\text{cond}}(N_c > \gamma_1 \sqrt{n}) \leq e^{-\gamma_1 \sqrt{n}} \mathbf{E}_{\text{cond}} [e^{N_c}]$$

$$\mathbf{P}_{\text{cond}}(N_c > \gamma_1 \sqrt{n}) \leq e^{-\gamma_1 \sqrt{n}} (\mathbf{E}_{\text{cond}} [e^{X_0}])^{N_r}$$

car les  $X_i$  sont indépendants et identiquement distribués (sauf quand  $i$  est un noeud de la bande verticale considérée mais dans ce cas on ne fait que diminuer  $p_i$ ).

De plus,  $\mathbf{E}_{\text{cond}} [e^{X_0}] = 1 + (e - 1)p_0$  donc

$$\mathbf{P}_{\text{cond}}(N_c > \gamma_1 \sqrt{n}) \leq e^{-\gamma_1 \sqrt{n} + N_r \ln(1 + (e-1)p_0)} \leq e^{-\gamma_1 \sqrt{n} + 2(e-1)N_v}$$

On rappelle que le processus poissonien produit  $N_v \leq \frac{2c\sqrt{2n}}{\beta}$  avec une probabilité qui tend vers 1 avec une vitesse de convergence en  $e^{-cste \cdot \sqrt{n}}$  quand  $n$  tend vers l'infini. On en conclut que pour  $\gamma_1$  suffisamment grand,  $\mathbf{P}(N_v \leq \frac{2c\sqrt{2n}}{\beta} \wedge N_c > \gamma_1 \sqrt{n})$  tend vers 0 avec la même vitesse de convergence. En outre, cet événement se produit simultanément dans les  $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2c}}$  bandes verticales avec forte probabilité : cela découle du résultat de base suivant sur une famille dénombrable d'événements  $E_j$ .

$$\mathbf{P} \left( \bigcap_j E_j \right) = 1 - \mathbf{P} \left( \overline{\bigcap_j E_j} \right) = 1 - \mathbf{P} \left( \bigcup_j \overline{E_j} \right)$$

$$\mathbf{P} \left( \bigcap_j E_j \right) \geq 1 - \sum_j \mathbf{P}(\overline{E_j})$$

Calculons maintenant la charge sur un noeud  $A$  donné. Les appels sur le système de chemins interfèrent à distance  $d_1 = \frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{n}}(1 + \Delta)$  or le nombre de cases de la grille à distance au plus  $d_1$  de  $A$  est borné par une constante  $\kappa$  (qui dépend quadratiquement de  $\Delta$ ) et chaque case voit passer au plus deux chemins, un horizontal et un vertical. En one to one, la charge sur  $A$  issue du trafic sur ces chemins est donc bornée avec une forte probabilité par

$$\kappa \cdot (1 + \gamma_1) \cdot \frac{2c\sqrt{2n}}{\beta}$$

Il reste un terme dans la charge sur  $A$  dû aux accès au système de chemins ainsi qu'aux sorties de ce système. Ces appels interfèrent à distance  $d_2 = \frac{c\sqrt{2}}{\sqrt{n}} \ln \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2c}} \right) (1 + \Delta)$ . Le nombre de noeuds qui sont au plus à distance  $d_2$  de  $A$  est borné avec forte probabilité par

$$2 \cdot \pi d_2^2 \cdot n = 4\pi c^2 (1 + \Delta)^2 \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2c}} \right) \right]^2$$

Un raisonnement similaire à celui effectué ci-dessus permet de borner le deuxième terme de la charge avec forte probabilité par

$$4(1 + \gamma_2)\pi c^2 (1 + \Delta)^2 \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2c}} \right) \right]^2$$

Le facteur  $(1 + \gamma_2)$  où  $\gamma_2$  est une constante positive provient de deux choses :

- une contribution de 1 pour les accès aux chemins horizontaux
- une contribution de  $\gamma_2$  pour les sorties des chemins verticaux avec de nouveau une incertitude liée au caractère aléatoire du schéma de trafic, mais on peut appliquer la même méthode que précédemment.

A nouveau, la vitesse de convergence de la probabilité considérée est exponentielle donc suffisante pour que l'événement ait lieu simultanément sur tous les noeuds du réseau aléatoire car le nombre de noeuds est linéaire en  $n$ .

Au terme de ce calcul, on conclut que la charge totale maximale sur un noeud est avec forte probabilité en  $\mathcal{O}(\sqrt{n})$  puisque  $(\ln(n))^2 = o(\sqrt{n})$  quand  $n$  tend vers l'infini. Comme pour le routage local analysé dans la partie 2, c'est l'aspect ad hoc du réseau, c'est-à-dire le fait de transmettre les paquets de noeud en noeud, qui occasionne l'essentiel des accès au médium et qui constitue donc le facteur limitant de la capacité du réseau.

### 3.5 Bilan de l'analyse

Si l'inverse de la charge fournit un bon indicateur du débit que l'on peut garantir à chaque noeud pour sa propre communication en one to one, on s'aperçoit que la théorie de la percolation a permis d'atteindre en ordre de grandeur la borne supérieure de la capacité pour un réseau ad hoc sans fil à savoir  $\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ . On ne s'est pas préoccupé ici de la valeur des constantes car cette analyse est purement asymptotique.

## 4 Simulation

J'ai codé un simulateur en Java afin d'obtenir des intuitions et des confirmations sur la charge et le débit critique dans le modèle présenté au paragraphe 1.2. Ce simulateur est entièrement dédié à cette étude et il suit le modèle avec suffisamment de fidélité pour que l'on puisse comparer les résultats numériques obtenus avec les prévisions issues de l'analyse de la partie 2 notamment. Plusieurs routages alternatifs sont également simulés afin de fournir des points de comparaison même si ces derniers ne se prêtent pas facilement à une analyse théorique.

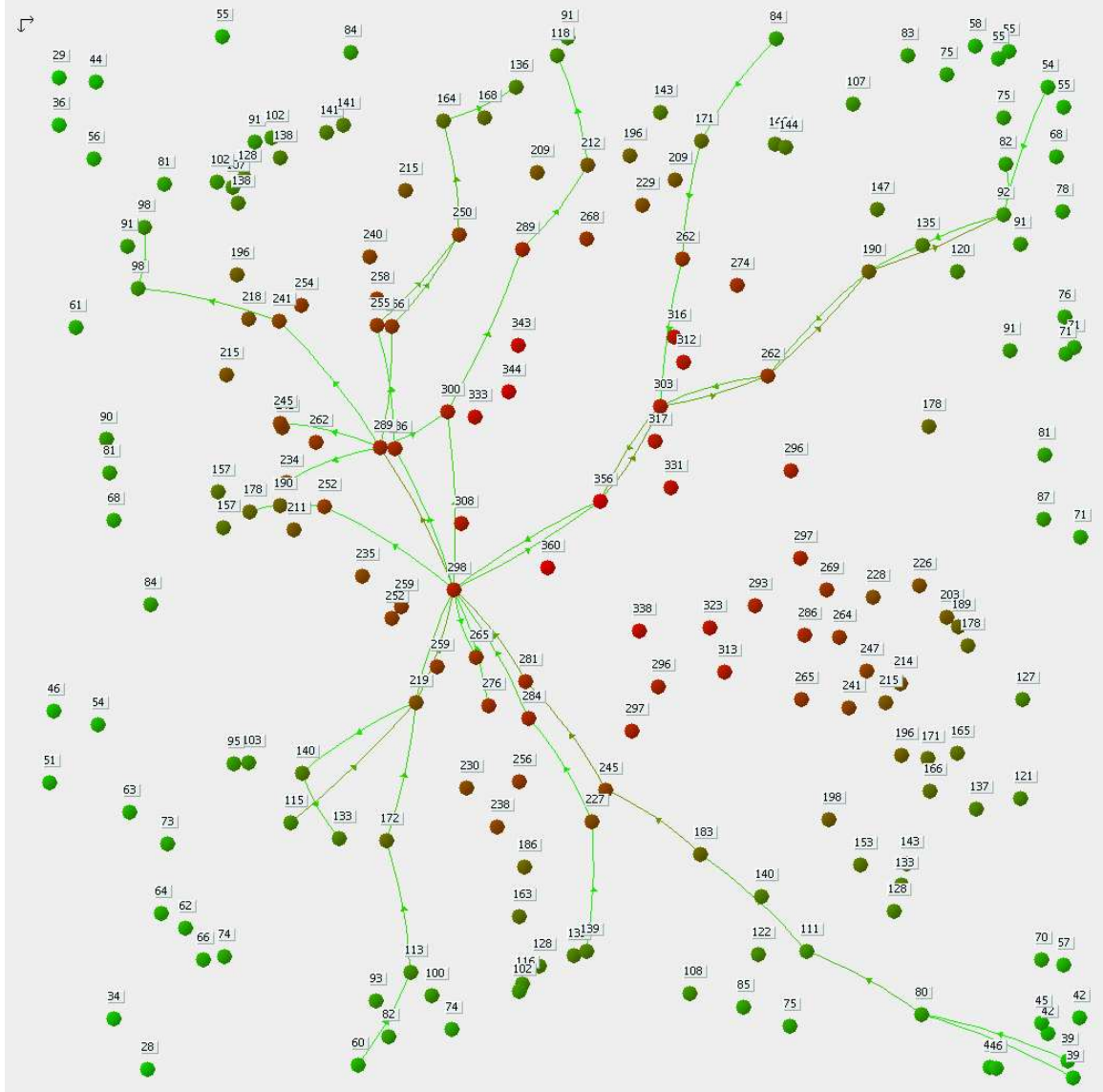


FIG. 6 – Réseau de 300 noeuds avec un routage local classique. Les étiquettes sur les noeuds indiquent la charge, de même que les couleurs (du vert au rouge quand la charge augmente). On voit aussi les routes passant par un des noeuds centraux.

### 4.1 Adaptation du modèle

Pour simplifier la programmation, le simulateur est à événements discrets et les communications sont organisées en « rounds » : dans un premier temps, tous les noeuds dont la file d'attente est non vide participent à la phase d'attente et d'élection des noeuds qui accèdent au médium. On a donc une liste des noeuds candidats à l'accès au médium ordonnée selon le temps d'attente  $w$  croissant. Dans un deuxième temps, les noeuds non



bloqués procèdent à l'envoi des paquets de données et des messages d'acquiescement. On considère que ces phases sont de durée fixe (*window* et taille de paquet fixes) et on effectue donc l'approximation selon laquelle l'ensemble du réseau est synchronisé sur la succession de ces rounds (de manière plus réaliste, la synchronisation effective due à l'accès au médium ne serait que locale).

En one to one, à chaque round, chaque nœud a une probabilité  $p \in [0, 1]$  de produire un nouveau paquet pour sa propre communication et de le mettre à la queue de sa file d'attente. Sur une durée de  $T$  rounds, un nœud envoie donc en moyenne  $p \cdot T$  paquets, ce qui signifie que son débit moyen vaut  $p$  paquets par round (unité que l'on utilisera dans toute la suite). L'objectif majeur de la simulation est d'évaluer la probabilité maximale et donc le débit maximal pour chaque nœud qui permet de ne pas congestionner le réseau. Cela dépend du protocole utilisé pour le routage et on cherche donc à comparer différents routages et trouver ceux qui obtiennent les meilleures performances. Pendant la simulation, chaque nœud choisit aléatoirement un interlocuteur initial et change d'interlocuteur après un nombre aléatoire de paquets envoyés pour éviter que globalement on reste dans une situation particulière défavorable en raison de l'aspect aléatoire du choix.

Le fait que tous les nœuds aient le même débit  $p$  signifie que les zones les plus chargées vont imposer le débit à l'ensemble du réseau. En effet, une communication qui se déroulerait entre deux nœuds à l'écart de la zone la plus chargée du réseau et qui n'entrerait pas en concurrence avec beaucoup d'autres communications pour l'accès au médium pourrait obtenir un débit plus élevé que les communications qui passent par les « points chauds » du réseau. Ces derniers sont situés plutôt au centre du carré unité, carrefour de nombreuses routes pour de nombreux protocoles de routages classiques. Le débit maximal évoqué ci-dessus sera donc garanti pour chaque communication mais pas nécessairement impossible à dépasser pour certaines communications.

On peut enfin remarquer qu'on n'envisage pas les pertes de paquets afin de simplifier le modèle. On néglige donc les erreurs de transmission et les files d'attente ne sont pas a priori limitées en taille. Le seul critère retenu est la « non-explosion » de ces files, c'est-à-dire le fait que leur taille ne diverge pas. En fait, on semble observer empiriquement que lorsqu'elles dépassent un nombre de paquets de quelques unités, elles ne parviennent jamais à retrouver l'équilibre.

## 4.2 En pratique

### 4.2.1 Les différents types de routages simulés

**Routage local classique :** on désigne par le terme classique le protocole de routage présenté au paragraphe 2.1.1.

**Routage local dépendant de la charge :** par rapport au routage précédent, on apporte ici une légère modification pour tenter de répartir la charge sur le carré unité. On cherche à anticiper l'arrivée d'une route dans une zone chargée en déviant volontairement de l'axe source-destination. Pour cela, on calcule les chemins un par un et on met à jour la charge après le calcul de chaque chemin.

Lors du calcul d'un nouveau chemin, lorsqu'on arrive au nœud  $A$ , on considère les nœuds  $C$  à une distance de  $A$  (voir figure 7) comprise entre  $r_0$  et  $r_{max}$  et on les divise en trois groupes :

- l'ensemble de ces nœuds  $C$  tels que  $-\frac{\pi}{2} \leq (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \leq -\frac{\pi}{6}$ , c'est-à-dire les nœuds qui vont à « droite » par rapport à l'axe  $(AB)$
- l'ensemble de ces nœuds  $C$  tels que  $-\frac{\pi}{6} \leq (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \leq \frac{\pi}{6}$ , c'est-à-dire les nœuds qui sont proches l'axe  $(AB)$ . Ce sont les nœuds considérés par le protocole local classique
- l'ensemble de ces nœuds  $C$  tels que  $\frac{\pi}{6} \leq (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \leq \frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire les nœuds qui vont à « gauche » par rapport à l'axe  $(AB)$

On calcule ensuite les charges moyennes pour chacun de ces secteurs  $C_{gauche}$ ,  $C_{centre}$  et  $C_{droite}$ . Avec probabilité  $q = \min(1, C_A/C_{centre})$ , on décide alors de ne pas aller dans le secteur central mais dans le secteur non vide le moins chargé, par exemple à gauche, à condition que  $C_{gauche} \leq \min(C_{centre}, C_{droite})$ . De plus, si l'on est allé à gauche (respectivement à droite), on interdit d'aller à droite (respectivement à gauche) au saut suivant pour empêcher des phénomènes de « zigzag » qui seraient très sous-optimaux.

On applique enfin le protocole classique pour chercher un candidat  $C$  avec les rayons successifs  $r_k$  dans le secteur choisi en imposant la contrainte supplémentaire  $CB \leq AB$  si l'on n'est pas dans le secteur central (on veut être sûr de se rapprocher de la destination, ce qui n'est pas garanti a priori). On note que l'on a toujours une probabilité au moins  $1 - q$  d'aller au centre.

On utilise le rapport de charges  $C_A/C_{centre}$  pour décider si on reste au centre car il est inutile de dévier de l'axe  $AB$  si le nœud est plus chargé ou presque autant chargé que les nœuds  $C$  candidats pour être la prochaine étape. L'aspect probabiliste permet d'éviter de changer de décision trop brutalement quand la charge évolue.

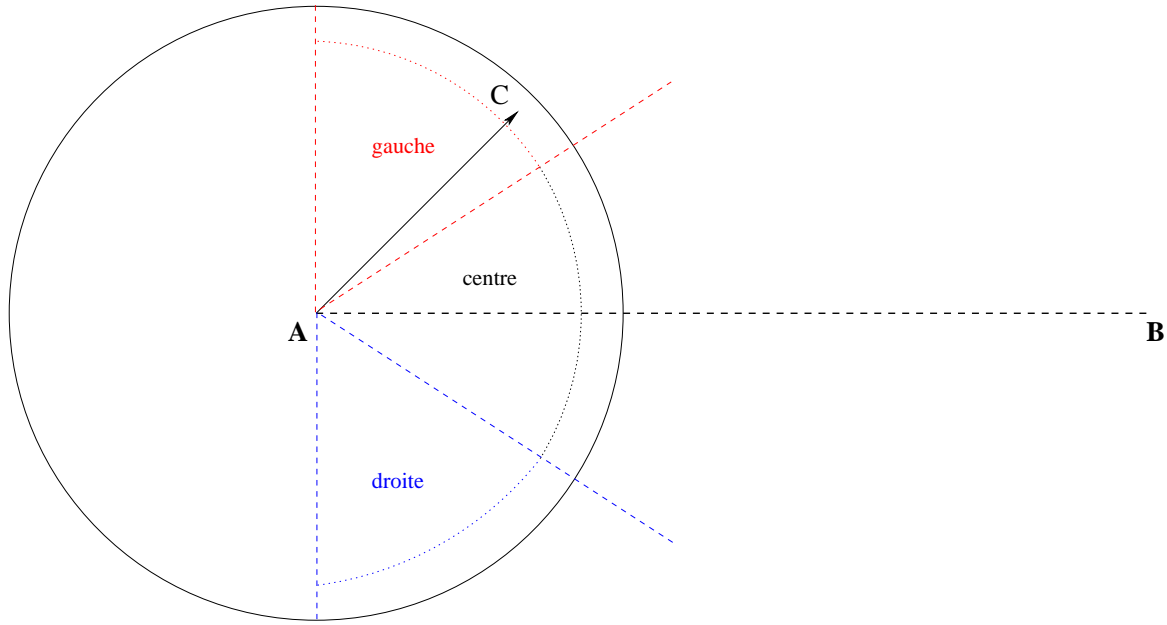


FIG. 7 – Les trois secteurs dans le protocole de routage local en fonction de la charge

**Routage global classique :** on fait référence ici à un routage qui calcule les plus courts chemins en attribuant  $d^\alpha$  comme coût à une arête de longueur  $d$ . On utilise l'algorithme de Dijkstra avec des tas de Fibonacci pour calculer ces plus courts chemins.

**Routage global dépendant de la charge :** on reprend l'algorithme de Dijkstra utilisé précédemment mais on fait évoluer la métrique au fur et à mesure du calcul des plus courts chemins. Pour cela, on calcule les chemins un par un et on met à jour la charge après le calcul de chaque chemin. Le coût attribué à une arête  $AB$  pour le calcul du chemin suivant est alors

$$d(A, B)^\alpha + f(C_B)$$

où  $C_B$  désigne la charge du noeud  $B$  avant le calcul du présent chemin et  $f$  est une fonction de « pénalité » à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  qui permet de forcer les chemins à éviter les zones les plus chargées. On espère ainsi mieux répartir la charge totale sur l'ensemble du carré unité. Comme fonction  $f$ , on peut choisir :

$$f(c) = cste \cdot \frac{c}{n^{\alpha/2} \sqrt{n}}$$

ou encore

$$f(c) = \exp \left( cste \cdot \left( \frac{c}{\sqrt{n}} - cste' \right) \right) \cdot \frac{1}{n^{\alpha/2}}$$

Le terme en  $\frac{1}{n^{\alpha/2}}$  permet d'avoir une pénalité du même ordre de grandeur que  $d(A, B)^\alpha$  et on divise  $c$  par  $\sqrt{n}$  car c'est l'ordre de grandeur de la charge moyenne sur un noeud en one to one. Il est important de bien fixer les paramètres pour ne pas complètement occulter le terme dépendant de la distance dans le coût sous peine de faire trop souvent des sauts de rayon maximum et d'avoir des routes très surprenantes... Il faut également veiller à la stabilité de ce routage : on se contente ici de l'obtenir empiriquement sans se préoccuper d'une analyse fine. Ce problème est traité dans [12].

#### 4.2.2 Fonctionnement du simulateur

La méthode `main` de la classe principale `Simulateur` prend en arguments les paramètres suivants :

- un paramètre pour définir le générateur aléatoire
- l'intensité  $n$  du processus de Poisson sur le carré unité
- le type de routage
- le nombre de rounds de simulation

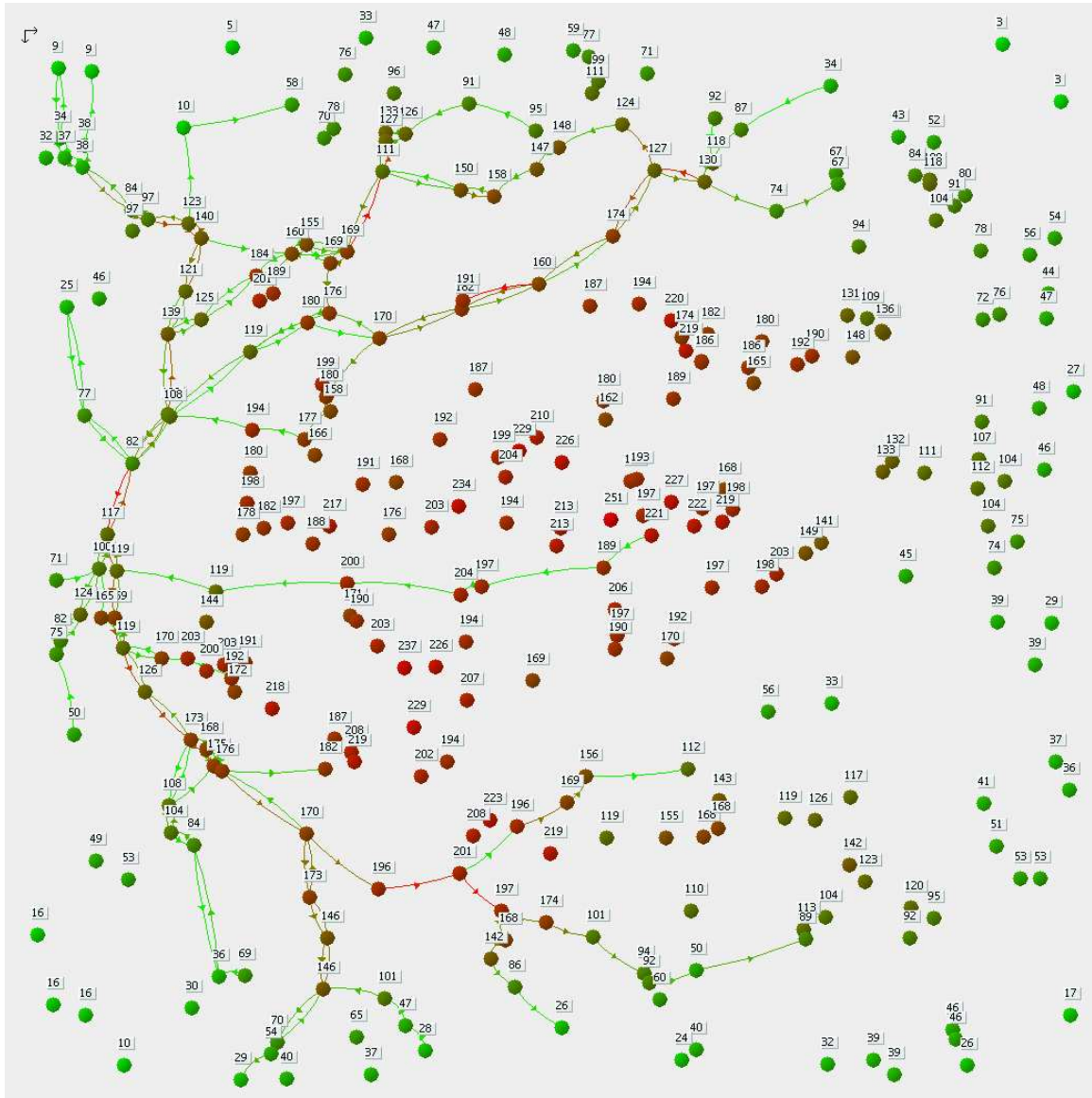


FIG. 8 – Réseau de 300 noeuds avec un routage global dépendant de la charge. On voit les routes passant par un noeud situé au bord : un phénomène de contournement de la zone centrale très chargée semble se dessiner comme on le souhaitait.

- la probabilité  $p$  de produire un nouveau paquet à chaque round pour chaque noeud
- si l'on souhaite une série de simulations, le nombre de réseaux à simuler (tous avec les paramètres précédents)
- si l'on souhaite une exportation de données sur les noeuds et les chemins, le nom du fichier cible

La simulation se déroule comme suit :

1. on génère le réseau aléatoirement (on tire le nombre total de noeuds selon une loi de Poisson puis les coordonnées de chaque noeud uniformément et indépendamment)
2. on calcule les routes selon le type de routage demandé (en choisissant un interlocuteur au hasard pour chaque noeud si on est en one to one)
3. on simule la succession de rounds avec à chaque round la phase d'accès au médium puis l'échange des paquets proprement dit

4. à la fin, on procède à une analyse de l'état du réseau pour afficher un certain nombre d'informations (charges moyenne et maximale sur un noeud, tailles moyenne et maximale des files d'attente à l'issue de la simulation...)
5. l'exportation éventuelle de données permet grâce à un autre programme Java issu de la bibliothèque Mascot d'afficher le réseau et les routes avec une indication sur la charge et le trafic sur chaque noeud et chaque arête.

### 4.3 Résultats

Les simulations ont été effectuées sur des réseaux allant de quelques centaines à quelques milliers voir dizaines de milliers de noeuds quand la puissance de calcul et les optimisations du code Java l'ont permis. En pratique, on a pris  $\Delta = 1/2$  ou 1 dans les simulations et les graphiques présentés ici correspondent à  $\Delta = 1/2$ . Bien sûr, le choix de  $\Delta$  influe sur les performances mais cela ne change pas fondamentalement le comportement du réseau : on ne modifie que les constantes.

Dans le cadre du routage local présenté au paragraphe 2.1.1, en one to one, on trouve un trafic total de l'ordre de  $0.3n\sqrt{n}$  et une charge totale de l'ordre de  $n\sqrt{n}$  multipliée par une constante comprise entre 10 et 12. Cette valeur est plus faible pour des valeurs de  $n$  de quelques centaines seulement mais se stabilise quand  $n$  atteint quelques milliers. Ce phénomène est parfaitement logique puisque les effets de bords (disques qui « débordent » du carré unité) sont d'autant moins négligeables que  $n$  est petit : la proportion de noeuds qui sont concernés par les effets de bord est inférieure à

$$4 \cdot r_{max}(1 + \Delta) = \mathcal{O}\left(\sqrt{\frac{\ln(n)}{n}}\right)$$

qui tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Les premiers résultats correspondent donc aux prévisions obtenues grâce à l'analyse au paragraphe 2.5. Le schéma de trafic one to one avec choix aléatoire de l'interlocuteur échantillonne bien le schéma all to all et il suffit de diviser les ordres de grandeur du trafic et de la charge par  $n$ , les constantes étant peu modifiées.

Les figures 9, 10 et 11 présentent les valeurs de la charge obtenues pour les différents routages simulés. Les valeurs sont des moyennes observées sur des séries de plusieurs dizaines de réseaux. Le phénomène intéressant révélé par la simulation est un écart à la moyenne important en ce qui concerne la charge individuelle sur un noeud. En effet, la charge individuelle moyenne en one to one est de l'ordre de  $\sqrt{n}$  mais on constate empiriquement que le rapport entre la charge maximale et cette charge moyenne est croissant avec  $n$ . Pour le routage local classique, la figure 11 suggère que l'on obtient une charge maximale de l'ordre de  $\sqrt{n \ln(n)}$ . Cependant, la figure 10 indique que le fait de tenir compte de la charge dans le calcul des chemins permet d'améliorer les performances. En particulier, le routage global dépendant de la charge parvient presque à un rapport constant entre la charge maximale et la charge moyenne mais cette dernière augmente néanmoins légèrement plus vite que  $\sqrt{n}$ .

On peut ensuite chercher la valeur critique de  $p$  en fonction de  $n$ , c'est-à-dire la valeur de  $p$  à partir de laquelle la taille des buffers les plus chargés va diverger si on laisse la simulation durer un nombre de rounds suffisant. Les figures 12 et 13 représentent les débits moyens critiques respectivement pour le routage local classique et le routage global dépendant de la charge. Les valeurs ont été estimées par dichotomie. Une trop grande précision n'aurait pas de sens car le débit critique est étroitement lié au réseau et l'aspect aléatoire provoque des variations. On s'aperçoit que ces valeurs critiques suivent toutefois assez bien l'inverse de la charge maximale à une constante indépendante de  $n$  près, ce qui valide l'idée que la charge est un bon indicateur.

### 4.4 Interprétation et limites

#### 4.4.1 Restons prudents

On peut tout d'abord remarquer qu'il faut rester très prudent quant à la modélisation du rapport entre la charge maximale et la charge moyenne par un facteur de la forme  $\sqrt{\ln(n)}$  pour le routage local classique. En effet, si l'on remplace  $\sqrt{\ln(n)}$  par  $\ln(n)$ , on peut également obtenir une modélisation assez correcte de ce rapport, même si elle semble moins bonne que la précédente. La difficulté réside dans la détection des facteurs  $\ln(n)$  ou  $\sqrt{\ln(n)}$ , étant donné que pour les valeurs de  $n$  considérées (de 100 à quelques milliers), on ne les distingue pas toujours aisément des constantes. Seule l'analyse du problème peut apporter la réponse.

En outre, on doit rappeler qu'on a choisi l'inverse de la charge comme indicateur pour estimer le débit maximal que le réseau peut soutenir. Un estimateur tout à fait exact doit tenir compte de la concurrence pour

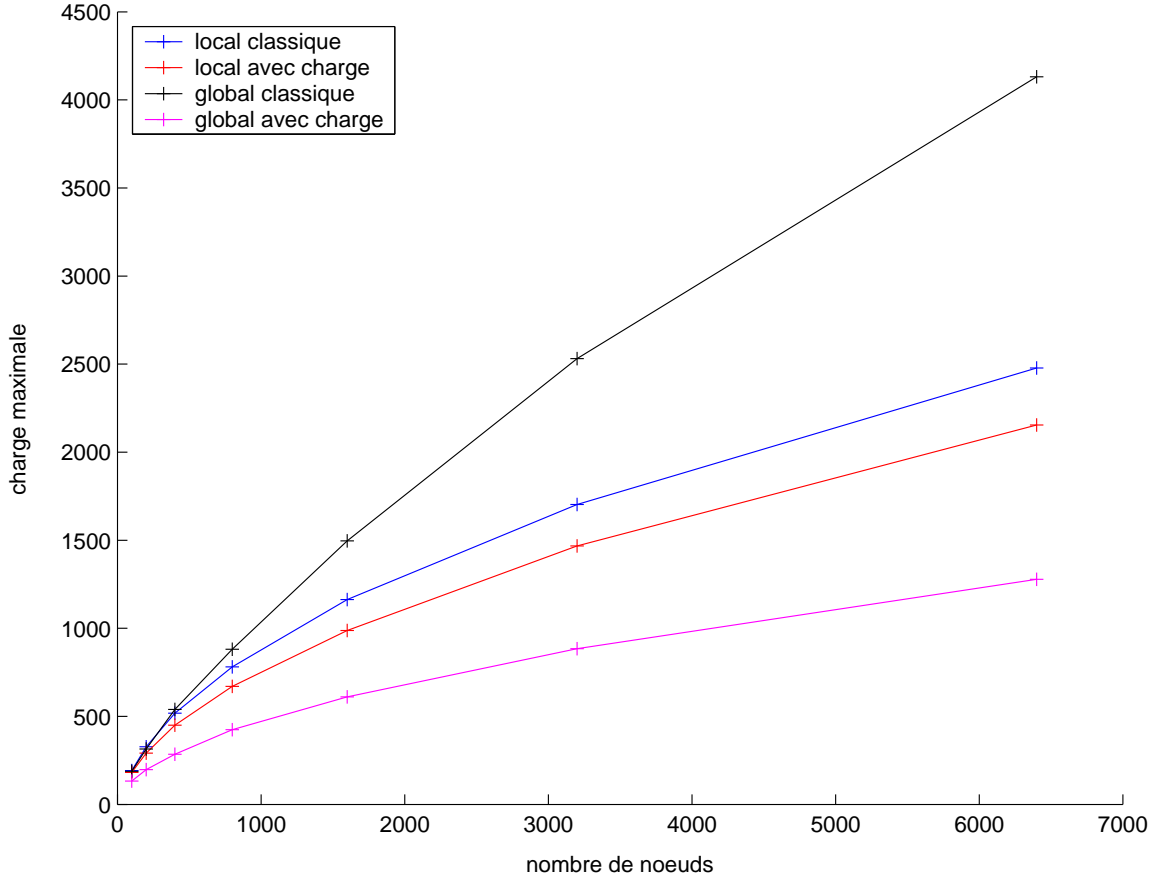


FIG. 9 – Charge maximale en one to one en fonction de  $n$  (valeur moyenne observée sur une série de 100 réseaux)

l'accès au medium et la charge fournit déjà une bonne indication. Si on adapte la remarque du paragraphe 2.5 au cadre de la simulation, sur un intervalle de temps  $t$  compté en nombre de rounds, le nombre d'accès au canal de communication dans le voisinage du noeud  $i$  vaut environ  $t \cdot p \cdot C_i$ . En première approximation, ce nombre ne doit pas dépasser  $t$ . On peut donc penser que le produit  $p_{max} \cdot C_{max}$  est une constante  $\rho$  indépendante de  $n$ , ce qui fournit une borne pour le débit des communications sur le réseau. En pratique, il faut sans doute prévoir une perte supplémentaire due au fait que le canal n'est pas systématiquement utilisé : parfois, dans une zone, aucun noeud ne parvient à émettre à cause des communications des zones voisines ou bien tout simplement aucun noeud n'a de paquet à transmettre. D'un autre côté, un noeud peut être bloqué par plusieurs communications en même temps alors que ces dernières ont été comptées séparément dans la charge du noeud en question. Les figures 12 et 13 indiquent qu'en pratique on peut avoir  $\rho \geq 1$  ou  $\rho \leq 1$  suivant le phénomène qui l'emporte.

#### 4.4.2 Ecart à la moyenne

On peut s'interroger sur l'origine d'un facteur  $\sqrt{\ln(n)}$  pour l'écart à la moyenne de la charge individuelle avec le routage local classique. Voici une idée d'explication. On applique une grille  $m \times m$  sur le carré unité et pour chaque couple de cases on calcule un chemin sautant de case en case en restant au plus proche de la ligne droite. On peut calculer les nombres moyen et maximal de chemins passant par une case : ils sont l'un comme l'autre de l'ordre de  $m^3$ . On fixe alors  $m$  de l'ordre de  $\sqrt{\frac{n}{\ln(n)}}$  pour être sûr que chaque case contient au moins un noeud. On suppose que si un noeud  $i$  qui appartient à la case  $I$  veut envoyer un paquet à un noeud  $j$  de la case  $J$ , le chemin (en terme de noeuds) emprunté par le paquet est calculé avec le routage local classique en imposant comme contrainte supplémentaire de suivre le chemin (en terme de cases) entre  $I$  et  $J$ . Comme il y a en moyenne de l'ordre de  $\ln(n)$  noeuds dans une case, en all to all, une case voit passer de l'ordre de  $m^3 (\ln(n))^2$  chemins, ce qui vaut  $n \sqrt{n \ln(n)}$ . On voit alors que si un noeud est chargé par tous les chemins qui passent dans

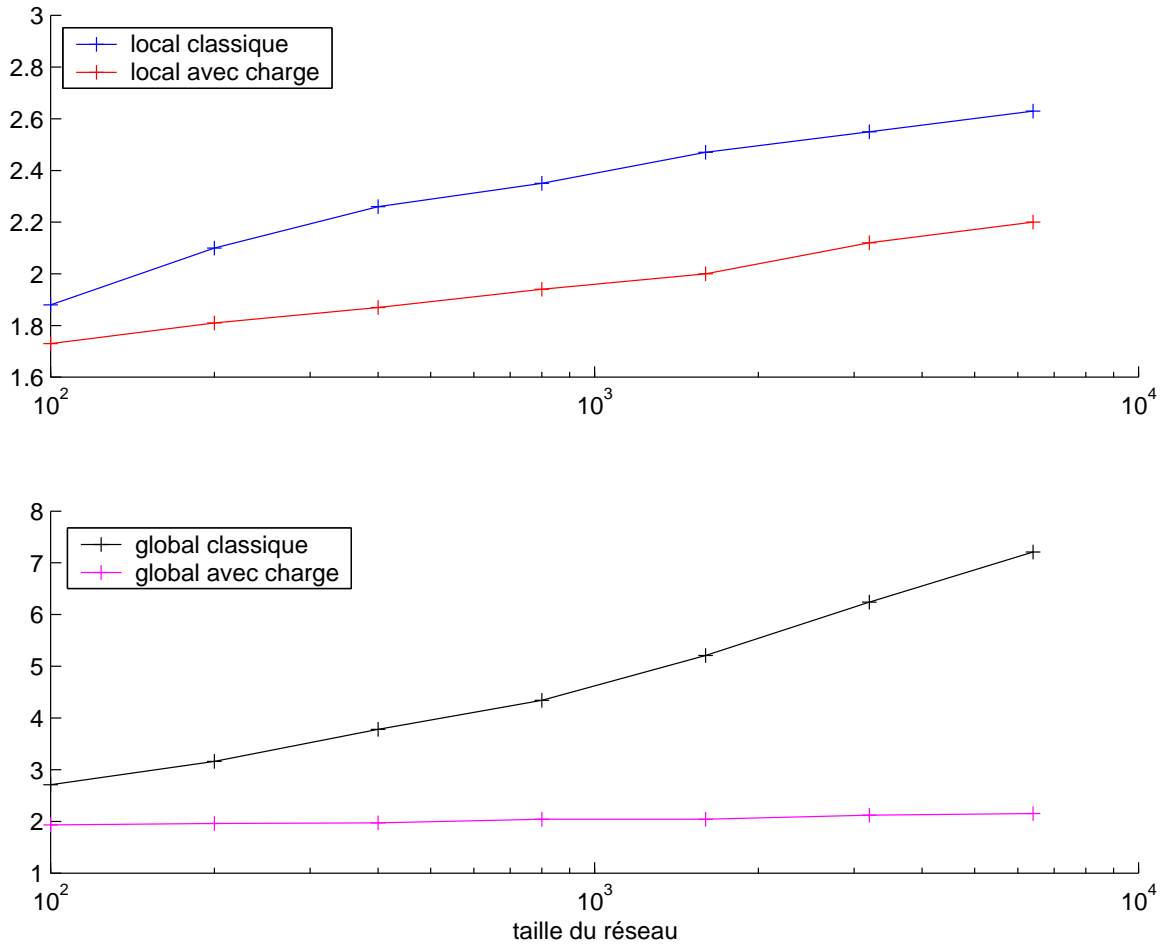


FIG. 10 – Rapport entre la charge maximale et la charge moyenne en fonction de  $n$  (échelle logarithmique pour l'axe des abscisses)

sa case, à cause d'un manque de parallélisme qui peut être dû au positionnement aléatoire des noeuds, la charge individuelle maximale peut atteindre des valeurs de l'ordre de  $n\sqrt{n \ln(n)}$ .

#### 4.5 Bilan des simulations

Le travail de simulation a constitué une part importante de cette étude : il a fallu obtenir un simulateur dédié qui soit performant et le faire fonctionner sur de nombreuses séries de paramètres pour essayer de dégager des tendances dans le comportement des réseaux ad hoc sans fil. Les simulations ont permis de confirmer les prévisions issues de l'analyse du routage local (charge moyenne en  $\sqrt{n}$ ) et de suggérer des améliorations (répartir la charge pour passer d'une capacité en  $1/\sqrt{n \ln(n)}$  à une capacité en  $1/\sqrt{n}$ ). Les ordres de grandeurs de taille de réseau (de 100 à 10000 noeuds) qui ont pu être simulés ont semblé suffire pour détecter l'esquisse des comportements asymptotiques. Il pourrait être intéressant de simuler le routage introduit dans la partie 3 pour comparer avec les résultats obtenus ici et voir à partir de quel ordre de grandeur de taille de réseau la valeur asymptotique du débit en  $1/\sqrt{n}$  devient pertinente. On pourrait également obtenir des informations sur les valeurs des constantes.

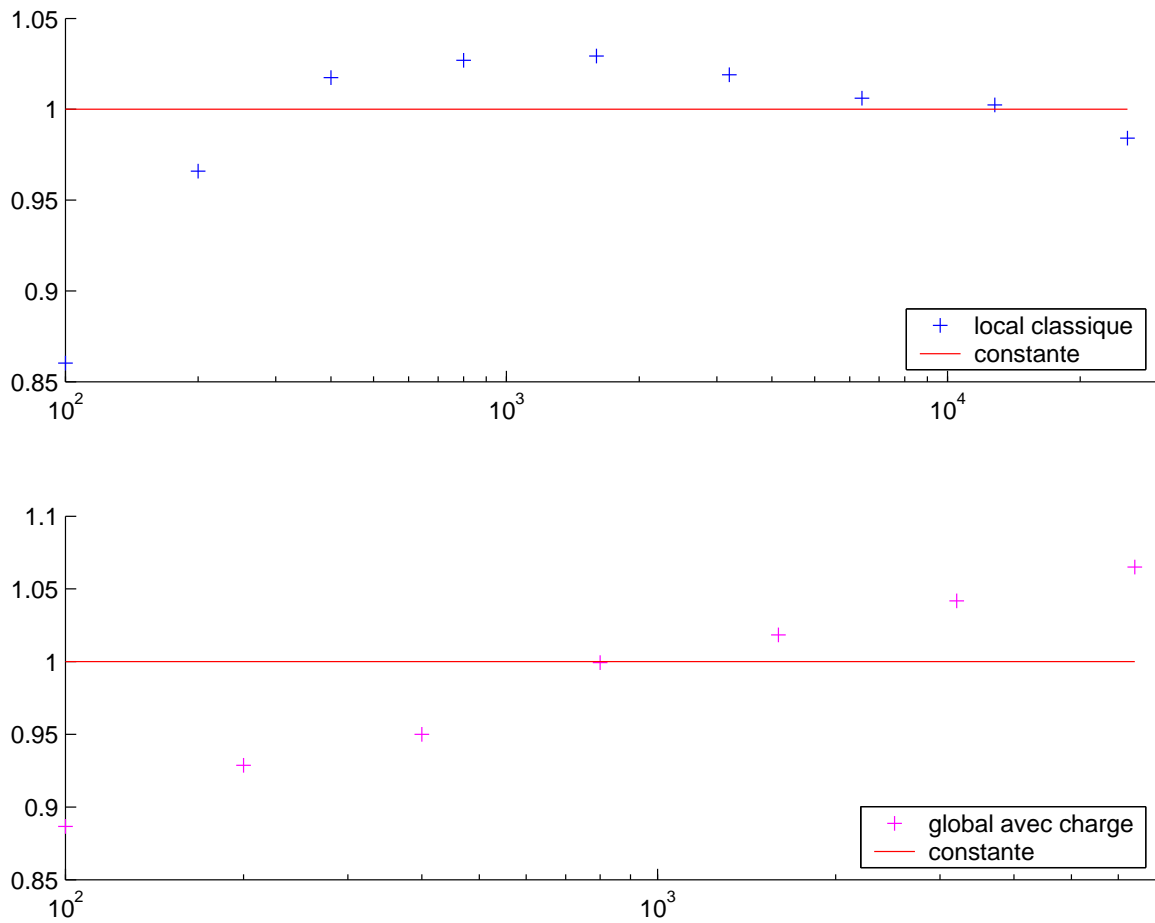


FIG. 11 – Charge maximale divisée par  $10\sqrt{n \ln(n)}$  pour le routage local classique et par  $15\sqrt{n}$  pour le routage global dépendant de la charge (échelle logarithmique pour  $n$  sur l'axe des abscisses)

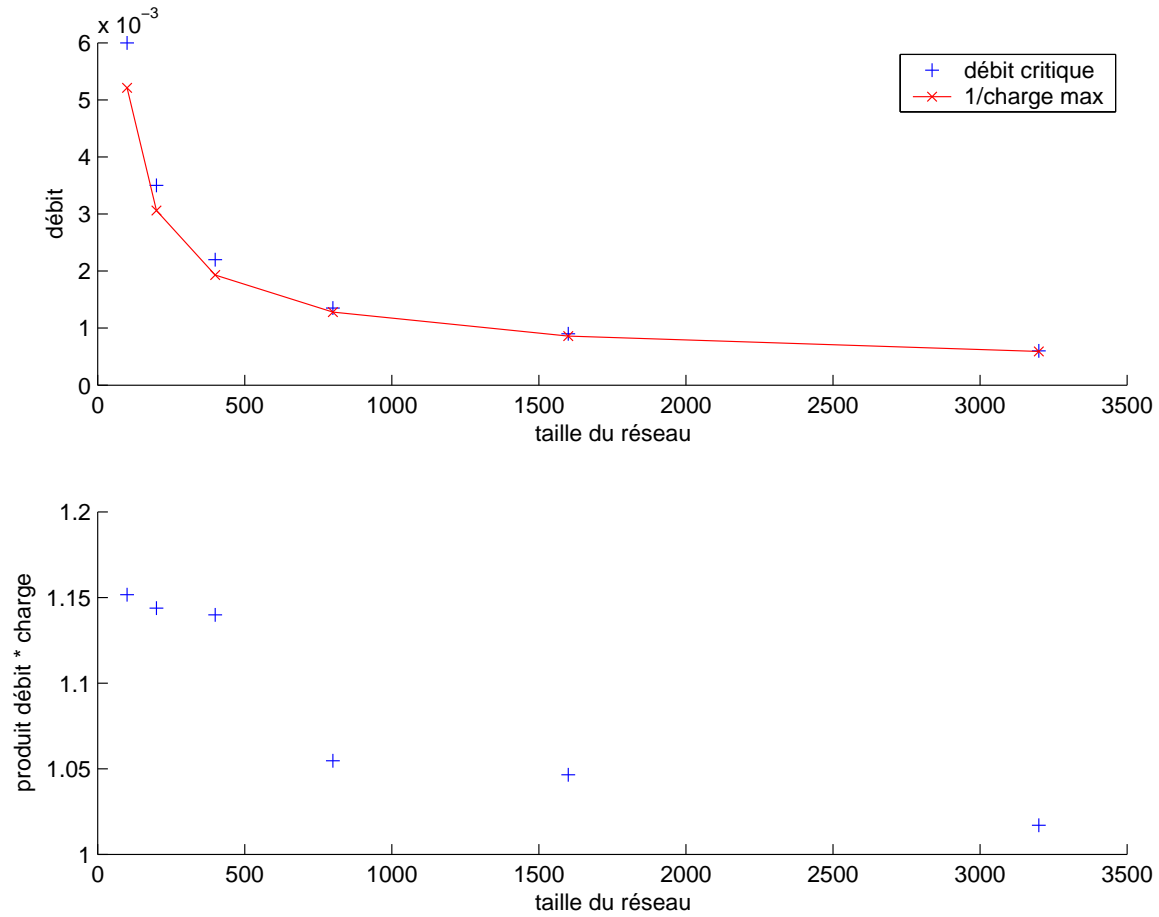


FIG. 12 – La figure du haut représente la valeur critique du débit moyen individuel  $p$  en one to one pour un routage local classique en fonction de  $n$ . Sur la figure du bas, on a multiplié ce débit critique par la valeur de la charge maximale



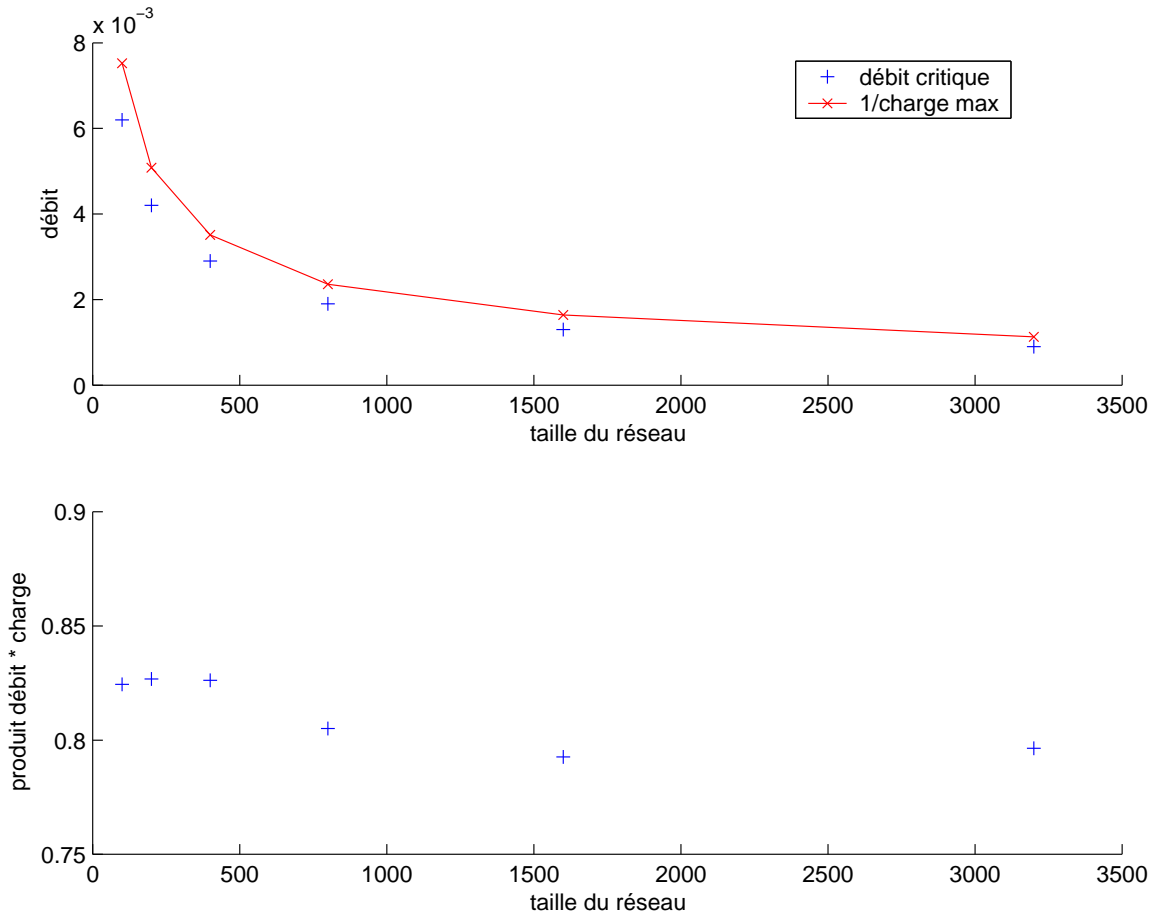


FIG. 13 – La figure du haut représente la valeur critique du débit moyen individuel  $p$  en one to one pour un routage global dépendant de la charge en fonction de  $n$ . Sur la figure du bas, on a multiplié ce débit critique par la valeur de la charge maximale

## 5 Conclusion

La capacité des réseaux ad hoc sans fil est bien asymptotiquement en  $\Theta\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$  pour un schéma de trafic one to one aléatoire dans un réseau aléatoire de  $N$  noeuds sur le carré unité  $[0, 1] \times [0, 1]$  ( $N$  variable aléatoire suivant une loi de Poisson d'intensité  $n$ ). Cela signifie que chaque noeud peut obtenir un débit de cet ordre de grandeur pour sa propre communication avec un autre noeud choisi aléatoirement.

Au terme de cette étude, il paraît difficile d'atteindre ce débit avec un routage local tel que celui de la partie 2 où les noeuds transmettent les paquets en connaissant uniquement les positions de leurs voisins et de la destination du paquet. En effet, on a vu que la charge sur un noeud est l'élément qui détermine les possibilités d'accès au médium et par conséquent le débit. Cependant, l'aspect aléatoire du réseau ne permet pas une bonne répartition de la charge dans un routage local : le parallélisme des communications dans une zone est étroitement lié au nombre de noeuds présents dans la zone et il faut une connaissance globale du réseau pour pouvoir anticiper les variations localement importantes de ce nombre.

Le routage fondé sur la théorie de la percolation présenté dans la partie 3 permet d'atteindre la borne supérieure de la capacité. En fixant la puissance d'émission des noeuds à un niveau suffisamment bas, quitte à isoler certains noeuds dans un premier temps, on limite les interférences tout en permettant l'existence de nombreux chemins disjoints qui traversent le réseau en parallèle de part en part. Ces chemins constituent un système suffisamment dense pour acheminer tout le trafic avec le débit souhaité. Il suffit ensuite d'attribuer à chaque noeud un point d'accès à ce système en autorisant une puissance d'émission plus grande pour les noeuds isolés, ce qui n'a pas d'impact globalement.

Les simulations ont permis de confirmer les prévisions issues de l'analyse du routage local et de suggérer des améliorations. Les ordres de grandeurs de taille de réseau (quelques centaines à quelques milliers de noeuds) qui ont pu être simulés ont semblé suffire pour détecter l'esquisse des comportements asymptotiques. Pour poursuivre cette étude, il pourrait être intéressant de simuler le routage introduit dans la partie 3 pour confronter d'un point de vue empirique ses performances avec celles des autres routages. Si les simulations ont également permis de valider l'idée d'utiliser l'inverse de la charge comme un indicateur du débit critique, il reste à prouver d'un point de vue analytique que le produit entre la charge individuelle maximale et le débit critique est bien une constante indépendante de l'intensité  $n$  du processus de Poisson, c'est-à-dire de la taille du réseau.

## Références

- [1] S. Schmid & R. Wattenhofer, « *Algorithmic Models for Sensor Networks* », In *Proceedings of the 14th International Workshop on Parallel and Distributed Real-Time Systems*, 2004
- [2] P. Gupta & P.R. Kumar, « *The Capacity of Wireless Networks* », In *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 46, no. 2, 2000
- [3] P. Gupta & P.R. Kumar, « *Critical Power for Asymptotic Connectivity in Wireless Networks* », In *Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications : A Volume in Honor of W.H. Fleming (W.M. McEneaney, G. Yin, and Q. Zhang (Eds.))*, Birkhauser, Boston, 1998
- [4] B. Liu, Z. Liu, D. Towsley, « *On the Capacity of Hybrid Wireless Networks* », In *Proceedings of IEEE Infocom*, 2003
- [5] J. Li, C. Blake, D.S.J. De Couto, H.I. Lee and R. Morris, « *Capacity of Ad Hoc wireless networks* », In *Mobile Computing and Networking*, 2001
- [6] O. Dousse, M. Franceschetti, and P. Thiran, « *On the throughput scaling of wireless relay networks* », In *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005
- [7] O. Dousse, M. Franceschetti, D. Tse, and P. Thiran, « *Closing the gap in the capacity of random wireless networks* », In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory*, 2004
- [8] B. Karp & H.T. Kung, « *GPSR : greedy perimeter stateless routing for wireless networks* », In *Mobile Computing and Networking*, 2000
- [9] Y. Yang, J. Wang and R. Kravets, « *Designing Routing Metrics for Mesh Networks* », In *Proceedings of the 1st IEEE Workshop on Wireless Mesh Networks*, 2005
- [10] M. Penrose, *Random geometric graphs*, Oxford University Press, 2003
- [11] G. Grimmett, *Percolation, Second edition*, Springer-Verlag, 1999
- [12] S.A. Plotkin, D.B. Shmoys, E. Tardos, « *Fast Approximation Algorithms for Fractionnal Packing and Covering Problems* », In *Proceedings of the IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, 1995
- [13] M. Habib, C. McDiarmid, J. Ramirez-Alfonsin and B. Reed (Eds.), *Probabilistic Methods for Algorithmic Discrete Mathematics*, Springer-Verlag, 1998



---

Unité de recherche INRIA Sophia Antipolis  
2004, route des Lucioles - BP 93 - 06902 Sophia Antipolis Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Futurs : Parc Club Orsay Université - ZAC des Vignes  
4, rue Jacques Monod - 91893 ORSAY Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Lorraine : LORIA, Technopôle de Nancy-Brabois - Campus scientifique  
615, rue du Jardin Botanique - BP 101 - 54602 Villers-lès-Nancy Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rennes : IRISA, Campus universitaire de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex (France)

Unité de recherche INRIA Rhône-Alpes : 655, avenue de l'Europe - 38334 Montbonnot Saint-Ismier (France)

Unité de recherche INRIA Rocquencourt : Domaine de Voluceau - Rocquencourt - BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)

---

Éditeur  
INRIA - Domaine de Voluceau - Rocquencourt, BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex (France)  
<http://www.inria.fr>  
ISSN 0249-6399